Bab 7
Pemrograman Dinamis

Pemrograman dinamis ini pertama kali dikembangkan oleh seorang ilmuwan benama Richard Bellman pada tahun 1957. Apabila dalam riset operasional yang lain, memiliki formulasi standar untuk memecahkan masalah, maka dalam pemrograman dinamis ini tidak ada formulasi yang standar, artinya setiap masalah dalam pemrograman dinamis memerlukan pola pendekatan atau penyelesaian yang berbeda satu dengan lainnya. Oleh karena itu perlu berlatih soal sebanyak mungkin untuk mendapatkan banyak bentuk penyelesaian kasus yang berbeda-beda.

Namun demikian, ada kesamaan dari setiap penyelesaian masalah dalam pemrograman dinamis ini, dimana setiap keputusan optimal yang diambil diperoleh dari banyak tahap (multistage). Hasil dari sebuah tahap akan berdampak atau menjadi masukan bagi tahap berikutnya.

Bentuk fungsi umum dari pemrograman dinamis ini adalah :

$$\mathbf{F_n(X) \qquad = \max \{ r_n (X_n) + f_{n-1} (X - X_n) \}}$$

dimana n = 2, 3, ………..

Persamaan di atas digunakan untuk perhitungan dari depan ke belakang (*forward-induction*) maupun dari belakang ke depan (*backward-induction*).

Untuk memperjelas masalah pemrograman dinamis ini, perhatikan contoh berikut ini.

Sebuah perusahaan memiliki kapasitas produksi sebesar 700 ton per bulan. Distribusi produk dilakukan melalui transportasi darat, dan untuk menghemat biaya pengiriman, telah ditentukan volume pengiriman sebesar 100 ton setiap pengirimannya. Pasar yang dituju adalah pasar A, B, dan C.

Dari pengalaman yang ada, return dari setiap pasar dapat dilihat pada tabel berikut ini :

Pengiriman Produk ke -	Return dari kota A (Rp)	Return dari kota B (Rp)	Return dari kota C (Rp)
0	0	0	0
1	0,8	0,6	0,6
2	1,5	1,2	1,2
3	2,3	2	1,9
4	3	2,8	2,8
5	3,6	3,6	3,6
6	4	4	4,7
7	4,4	4,3	5,4

Bagaiman distribusi produk harus dilakukan oleh perusahaan agar diperoleh hasil atau return yang paling optimal ?

Jawab :
Masalah di atas dapat diselesaikan dengan pemrograman dinamis, dimana perhitungan akan dimulai dari pasar A, B dan diakhiri dengan perhitungan return di pasar C. Dengan persamaan dasar di atas, berarti nilai $f_1(X)$ akan menentukan nilai $f_2(X)$, dan nilai $f_2(X)$ ini akan menentukan nilai $f_3(X)$.

Tahap Pertama
Apabila semua produk hanya dipasarkan di kota A, maka return atau penghasilan yang diperoleh mulai dari tidak ada pengiriman hingga 7 kiriman (setiap pengiriman berisi 100 ton), adalah sebagai berikut :

Jika tidak ada pengiriman → f1(0) = r1 = 0
Jika ada 1 pengiriman → f1(1) = f1(1) = 0,8 → (lihat tabel sebelumnya)
Jika ada 2 pengiriman → f1(2) = r1(2) = 1,5
Jika ada 3 pengiriman → f1(3) = r1(3) = 2,3
Jika ada 4 pengiriman → f1(4) = r1(4) = 3,0
Jika ada 5 pengiriman → f1(5) = r1(5) = 3,6
Jika ada 6 pengiriman → f1(6) = r1(6) = 4,0
Jika ada 7 pengiriman → f1(7) = r1(7) = 4,4

Selanjutnya, hasil tersebut di atas, dimasukkan dalam tabel hasil sebagai berikut :

Produk (X), dlm ratusan ton	Pasar A		Pasar B		Pasar C	
	X1	f1(X)	X2	F2(X)	X3	F3(X)
0	0	0				
1	1	0,8				
2	2	1,5				
3	3	2,3				
4	4	3,0				
5	5	3,6				
6	6	4,0				
7	7	4,4				

Tahap Kedua
Apabila diperhitungkan pengiriman ke kota A dan kota B

Atas dasar hasil f1(X) di atas, nilai f2(X) dapat dicari dengan persamaan umum sebagiberikut :

Apabila X = 0, maka return f2(X) adalah juga 0, karena tidak ada (0) pengiriman
Apabila X = 1, maka

$$\mathbf{f_2(X) = \max \{ r_2 \ (X_2) + f_{2-1} (1 - X_2) \}}$$

Dimana 0 ≤ X2 ≤ 1

Sehingga nilai-nilai f2(1) adalah :

$$f2(1) = \max \left\{ \begin{array}{llll} r2(0) + f1(1) & = 0 & + 0,8 & = 0,8 \\ r2(1) + f1(0) & = 0,6 & + 0 & = 0,6 \end{array} \right\} \rightarrow 0,8$$

Dari hasil persamaan di atas, dapat dikatakan bahwa dengan asumsi 1 pengirman dapat dilakukan ke kota A atau ke kota B, maka kalau 1 kiriman berisi 100 ton tersebut sudah dikirim ke kota A, tentu tidak dapat dikirim ke kota B, begitu pula sebaliknya. Jika dikirim ke kota B maka hasilnya adalah 0,8 sedangkan jika ke kota B, hasilnya adalah 0,6. Dengan pilihan hasil tersebut, jika hanya ada 1 pengiriman, mana tentu perusahaan akan memilih mengirimkannya ke kota A, karena hasilnya lebih besar (0,8).

Apabila X = 2, maka

$$\mathbf{f_2(X) = \max \{ r_2 \ (X_2) + f_{2-1} (2 - X_2) \}}$$

Dimana 0 ≤ X2 ≤ 2

Sehingga nilai-nilai f2(2) adalah :

$$f2(2) = \max \left\{ \begin{array}{llll} r2(0) + f1(2) & = 0 & + 1{,}5 & = 1{,}5 \\ f2(1) + f1(1) & = 0{,}6 & + 0{,}8 & = 1{,}4 \\ r2(2) + f1(0) & = 1{,}2 & + 0 & = 1{,}2 \end{array} \right\} \rightarrow 1{,}5$$

Dari perhitungan di atas, dapat disimpulkan bahwa apabila ada 2 pengiriman (masing-masing berisi 100 ton), dan pengiriman dapat dilakukan di pasar A dan pasar B, maka akan ada 3 alternatif seperti perhitungan di atas. Dari tiga alternatif itu, jika hanya ada 2 kali pengiriman, maka yang paling baik adalah alternatif pertama, yakni dengan mengirim semuanya ke kota A atau f1(2), karena akan menghasilkan nilai yang paling besar yaitu 1,5.

Apabila X = 3, maka

$$\mathbf{f_2(X) = \max \{ r_2(X_2) + f_{2-1}(3 - X_2) \}}$$

Dimana $0 \leq X2 \leq 3$

Sehingga nilai-nilai f2(3) adalah :

$$f2(3) = \max \left\{ \begin{array}{llll} r2(0) + f1(3) & = 0 & + 2{,}3 & = 2{,}3 \\ f2(1) + f1(2) & = 0{,}6 & + 1{,}5 & = 2{,}1 \\ r2(2) + f1(1) & = 1{,}2 & + 0{,}8 & = 2{,}0 \\ r2(3) + f1(0) & = 2{,}0 & + 0 & = 2{,}0 \end{array} \right\} \rightarrow 2{,}3$$

Dari perhitungan di atas, dapat disimpulkan bahwa apabila ada 3 pengiriman (masing-masing berisi 100 ton), dan pengiriman dapat dilakukan di pasar A dan pasar B, maka akan ada 4 alternatif seperti perhitungan di atas. Dari tiga alternatif itu, jika hanya ada 3 kali pengiriman, maka yang paling baik adalah alternatif pertama, yakni dengan mengirim semuanya ke kota A atau f1(3), karena akan menghasilkan nilai yang paling besar yaitu 2,3.

Dengan cara yang sama, apabila diteruskan dengan 4 pengiriman, 5 pengiriman, hingga 7 pengiriman, maka akan diperoleh tabel kedua sebagai berikut.

Produk (X), dlm ratusan ton	Pasar A		Pasar B		Pasar C	
	X1	f1(X)	X2	F2(X)	X3	F3(X)
0	0	Rp 0	0	Rp 0		
1	1	0,8	0	0,8		
2	2	1,5	0	1,5		
3	3	2,3	0	2,3		
4	4	3,0	0	3,0		
5	5	3,6	0	3,6		
6	6	4,0	5	4,4		
7	7	4,4	4	5,1		

Tahap Ketiga
Setelah tahap kedua selesai, maka selanjutnya dilakukan perhitungan tahap ketiga untuk Pasar B dan C

Apabila X = 0, maka return f2(X) adalah juga 0, karena tidak ada (0) pengiriman
Apabila X = 1, maka

$$\mathbf{f_3(X) = \max \{ r_3\ (X_3) + f_{3-1}\ (1 - X_3) \}}$$

Dimana $0 \leq X3 \leq 1$

Sehingga nilai-nilai f3(1) adalah :

$$f3(1) = \max \left\{ \begin{array}{llll} r3(0) + f2(1) & = 0 & + 0{,}8 & = 0{,}8 \\ r3(1) + f2(0) & = 0{,}6 & + 0 & = 0{,}6 \end{array} \right\} \rightarrow 0{,}8$$

Dari hasil persamaan di atas, dapat dikatakan bahwa dengan asumsi 1 pengirman dapat dilakukan ke kota B atau ke kota C, maka kalau 1 kiriman berisi 100 ton tersebut sudah dikirim ke kota B, tentu tidak dapat dikirim ke kota C, begitu pula sebaliknya. Jika dikirim ke kota B maka hasilnya adalah 0,8 sedangkan jika ke kota C, hasilnya adalah 0,6. Dengan pilihan hasil tersebut, jika hanya ada 1 pengiriman, mana tentu perusahaan akan memilih mengirimkannya ke kota B, karena hasilnya lebih besar (0,8).

Apabila X = 2, maka

$$\mathbf{f_3(X) = \max \{ r_3\ (X_3) + f_{3-1}\ (2 - X_3) \}}$$

Dimana $0 \leq X3 \leq 2$

Sehingga nilai-nilai f3(2) adalah :

$$f3(2) = \max \left\{ \begin{array}{llll} r3(0) + f2(2) & = 0 & + 1{,}5 & = 1{,}5 \\ f3(1) + f2(1) & = 0{,}6 & + 0{,}8 & = 1{,}4 \\ r3(2) + f2(0) & = 1{,}2 & + 0 & = 1{,}2 \end{array} \right\} \rightarrow 1{,}5$$

Dari perhitungan di atas, dapat disimpulkan bahwa apabila ada 2 pengiriman (masing-masing berisi 100 ton), dan pengiriman dapat dilakukan di pasar B dan pasar C, maka akan ada 3 alternatif seperti perhitungan di atas. Dari tiga alternatif itu, jika hanya ada 2 kali pengiriman, maka yang paling baik adalah alternatif pertama, yakni dengan mengirim semuanya ke kota B atau f2(2), karena akan menghasilkan nilai yang paling besar yaitu 1,5.

Apabila X = 3, maka

$$f_3(X) = \max \{ r_3 (X_3) + f_{3-1}(3 - X_3) \}$$

Dimana $0 \leq X3 \leq 3$

Sehingga nilai-nilai f3(3) adalah :

$$f3(3) = \max \left\{ \begin{array}{llll} r3(0) + f2(3) & = 0 & + 2,3 & = 2,3 \\ f3(1) + f2(2) & = 0,6 & + 1,5 & = 2,1 \\ r3(2) + f2(1) & = 1,2 & + 0,8 & = 2,0 \\ r2(3) + f1(0) & = 1,9 & + 0 & = 1,9 \end{array} \right\} \rightarrow 2,3$$

Dari perhitungan di atas, dapat disimpulkan bahwa apabila ada 3 pengiriman (masing-masing berisi 100 ton), dan pengiriman dapat dilakukan di pasar B dan pasar C, maka akan ada 4 alternatif seperti perhitungan di atas. Dari tiga alternatif itu, jika hanya ada 3 kali pengiriman, maka yang paling baik adalah alternatif pertama, yakni dengan mengirim semuanya ke kota B atau f3(3), karena akan menghasilkan nilai yang paling besar yaitu 2,3.

Dengan cara yang sama, apabila diteruskan dengan 4 pengiriman, 5 pengiriman, hingga 7 pengiriman, maka akan diperoleh tabel kedua sebagai berikut.

Produk (X), dlm ratusan ton	Pasar A		Pasar B		Pasar C	
	X1	f1(X)	X2	F2(X)	X3	F3(X)
0	0	Rp 0	0	Rp 0	0	Rp 0
1	**1 ***	**0,8**	0 *	0,8	0	0,8
2	2	1,5	0	1,5	0	1,5
3	3	2,3	0	2,3	0	2,3
4	4	3,0	0	3,0	0	3,0
5	5	3,6	0	3,6	0	3,6
6	6	4,0	5	4,4	6	4,7
7	7	4,4	4	5,1	**6 ***	**5,5**

Setelah tabel di atas lengkap, dapat disimpulkan bahwa apabila kapasitas produksi perusahaan dimaksimalkan sehingga dapat berproduksi sebanyak 700 ton dan akan dikirimkan dalam 7 kali pengiriman, maka agar hasilnya optimal, maka distribusi pengiriman yang paling baik adalah bila 6 pengiriman ditujukan ke kota C (karena hasilnya paling tinggi, 5,5) dan sisanya ke kota A (0,8), karena dari perhitungan sebelumnya dinyatakan bahwa kalau hanya ada 1 pengiriman, yang paling baik kalau ditujukan pada pasar A.

Dengan distribusi pengiriman tersebut, hasil optimal yang diperoleh perusahaan adalah sebesar **Rp 5,5 + 0,8 = Rp 6,3**, dan ini adalah hasil tertinggi dibandingkan dengan alternatif-alternatif distribusi pengiriman yang lainnya.