

## Bab 5

### Masalah Penugasan

Masalah penugasan berkaitan dengan keinginan perusahaan dalam mendapatkan pembagian atau alokasi tugas (penugasan) yang optimal, dalam arti apabila penugasan tersebut berkaitan dengan keuntungan maka bagaimana alokasi tugas atau penugasan tersebut dapat memberikan keuntungan yang maksimal, begitu pula sebaliknya bila menyangkut biaya.

Penyelesaian masalah penugasan biasanya dilakukan dengan menggunakan metode **Hungarian** yang pada tahun 1916 dikembangkan oleh seorang ahli matematika berkebangsaan Hungaria yang bernama D König. Secara umum langkah-langkah penyelesaian masalah penugasan yang normal adalah :

1. Identifikasi dan penyederhanaan masalah dalam bentuk tabel penugasan
2. Untuk kasus minimalisasi, mencari biaya terkecil untuk setiap baris, dan kemudian menggunakan biaya terkecil tersebut untuk mengurangi semua biaya yang ada pada baris yang sama. Sedangkan untuk kasus maksimalisasi, mencari nilai tertinggi untuk setiap baris yang kemudian nilai tertinggi tersebut dikurangi dengan semua nilai yang ada dalam baris tersebut.
3. Memastikan semua baris dan kolom sudah memiliki nilai nol. Apabila masih ada kolom yang belum memiliki nilai nol, maka dicari nilai terkecil pada kolom tersebut untuk selanjutnya digunakan untuk mengurangi semua nilai yang ada pada kolom tersebut
4. Setelah semua baris dan kolom memiliki nilai nol, maka langkah selanjutnya adalah memastikan atau mengecek apakah dalam tabel penugasan tersebut, telah berhasil ditemukan nilai nol, sebanyak sumber daya (bisa karyawan, mesin, alat transportasi, atau sumber daya lainnya) yang juga tercermin dengan jumlah barisnya. Misalnya bila yang akan ditugaskan adalah 4 karyawan, maka harus ditemukan nilai nol sebanyak 4 buah yang terletak di baris dan kolom yang berbeda. Sebaiknya dimulai dari baris yang hanya memiliki 1 nilai nol. Langkah ini mengandung arti bahwa setiap karyawan hanya dapat ditugaskan pada satu pekerjaan saja.
5. Apabila belum, maka langkah selanjutnya adalah menarik garis yang menghubungkan minimal dua buah nilai nol dalam tabel penugasan tersebut.
6. Selanjutnya, perhatikan nilai-nilai yang belum terkena garis. Pilih nilai yang paling kecil, kemudian pergunakan untuk mengurangi nilai-nilai lain yang belum terkena garis, dan gunakan untuk menambah nilai-nilai yang terkena garis dua kali.
7. Dari hasil langkah ke-6 tersebut, apakah sekarang telah berhasil ditemukan nilai nol sejumlah atau sebanyak sumber daya (bisa karyawan, mesin, alat transportasi, atau sumber daya lainnya) yang juga tercermin dengan jumlah barisnya.
8. Jika sudah, maka masalah penugasan telah optimal, dan apabila belum maka perlu diulangi langkah penyelesaian ke-5 di atas.

Sebagai catatan, kasus penugasan dianggap normal apabila jumlah sumber daya yang akan ditugaskan dan jumlah pekerjaan atau tujuan adalah sama.

Untuk lebih jelasnya, perhatikan contoh kasus berikut ini.

**A. Masalah Minimalisasi (untuk kasus normal)**

Sebuah perusahaan memiliki 4 orang karyawan yang harus menyelesaikan 4 pekerjaan yang berbeda. Karena sifat pekerjaan dan juga ketrampilan, karakteristik dari masing-masing karyawan, maka biaya yang timbul dari berbagai alternatif penugasan dari ke-4 karyawan tersebut juga berbeda, seperti terlihat dari tabel / matrik penugasan berikut ini :

Karyawan \ Pekerjaan	Pekerjaan			
	I	II	III	IV
A	15	20	18	22
B	14	16	21	17
C	25	20	23	20
D	17	18	18	16

*Catatan : Nilai-nilai dalam tabel tersebut dalam rupiah.*

Dari kasus penugasan tersebut di atas, penyelesaiannya adalah :

**Langkah 1**

Mencari biaya terkecil untuk setiap baris, dan kemudian menggunakan biaya terkecil tersebut untuk mengurangi semua biaya yang ada pada baris yang sama. Dengan langkah ini hasil yang diperoleh adalah :

0	5	3	7
0	2	7	3
5	0	3	0
1	2	2	0

**Langkah 2**

Memastikan semua baris dan kolom sudah memiliki nilai nol. Dan ternyata masih ada kolom yang belum memiliki nilai nol, yakni kolom 3. Dengan demikian perlu dicari nilai terkecil pada kolom tersebut untuk selanjutnya digunakan untuk mengurangi semua nilai yang ada pada kolom tersebut, sehingga akan menjadi :

0	5	1	7
0	2	5	3
5	0	1	0
1	2	0	0

Nah, sekarang setiap baris dan kolom sudah memiliki nilai nol, maka langkah selanjutnya adalah :

### Langkah 3

Langkah selanjutnya adalah memastikan atau mengecek apakah dalam tabel penugasan tersebut, telah berhasil ditemukan nilai nol, sebanyak sumber daya (bisa karyawan, mesin, alat transportasi, atau sumber daya lainnya) yang juga tercermin dengan jumlah barisnya. Misalnya bila yang akan ditugaskan adalah 4 karyawan, maka harus ditemukan nilai nol sebanyak 4 buah yang terletak di baris dan kolom yang berbeda. Sebaiknya dimulai dari baris yang hanya memiliki 1 nilai nol. Langkah ini menganduk arti bahwa setiap karyawan hanya dapan ditugaskan pada satu pekerjaan saja.

**Perhatikan !** Dari matrik di atas ternyata nilai nol yang ditemukan dalam baris 1 dan 2, meskipun berbeda baris namun masih berada dalam kolom yang sama, sehingga dapat dipastikan masalah belum optimal dan perlu dilanjutkan ke langkah berikutnya.

### Langkah 4

Karena belum optimal maka langkah selanjutnya adalah menarik garis yang menghubungkan minimal dua buah nilai nol dalam tabel penugasan tersebut, seperti terlihat pada tabel atau matrik berikut ini :

0	5	1	7
0	2	5	3
<del>5</del>	<del>0</del>	<del>1</del>	<del>0</del>
<del>1</del>	<del>2</del>	<del>0</del>	<del>0</del>

Dari langkah di atas terlihat bahwa garis yang berhasil dibuat adalah tiga, dengan menyisakan beberapa nilai yang tidak terkena garis.

### Langkah 5

Selanjutnya, perhatikan nilai-nilai yang belum terkena garis. Pilih nilai yang paling kecil (dari tabel di atas adalah nilai 1), kemudian nilai 1 tersebut dipergunakan untuk mengurangi nilai-nilai lain yang belum terkena garis, dan gunakan untuk menambah nilai-nilai yang terkena garis dua kali. Dengan langkah ini hasilnya adalah :

0	4	0	6
0	1	4	2
6	0	1	0
2	2	0	0

Perhatikan ! semua nilai yang tidak terkena garis nilainya akan berkurang sebesar nilai terkecil dari nilai yang belum terkena garis sebelumnya. Sementara itu nilai 5 dan 1 pada kolom 1 akan bertambah 1, karena kedua nilai tersebut terkena garis dua kali.

### Langkah 6

Dari hasil langkah di atas tersebut, apakah sekarang telah berhasil ditemukan nilai nol sejumlah atau sebanyak sumber daya (bisa karyawan, mesin, alat transportasi, atau sumber daya lainnya) yang juga tercermin dengan jumlah barisnya (mulai dari baris yang hanya memiliki 1 nilai nol)? Dari tabel atau matrik di atas ternyata telah berhasil ditemukan 4 nilai nol (sejumlah karyawan yang akan ditugaskan), yang berada di baris dan kolom yang berbeda.

0	4	0	6
0	1	4	2
6	0	1	0
2	2	0	0

Dari hasil di atas dapat dikatakan bahwa kasus penugasan tersebut telah optimal, dengan alokasi penugasan sebagai berikut :

Karyawan A ditugaskan mengerjakan pekerjaan III dengan biaya	Rp 18,-
Karyawan B ditugaskan mengerjakan pekerjaan I dengan biaya	Rp 14,-
Karyawan C ditugaskan mengerjakan pekerjaan II dengan biaya	Rp 20,-
Karyawan D ditugaskan mengerjakan pekerjaan IV dengan biaya	Rp 16,-
	----- +
<b>Total biaya</b>	<b>Rp 68,-</b>

*Dengan demikian dapat disimpulkan bahwa dengan metode Hungarian, kasus penugasan dalam perusahaan di atas dapat diselesaikan dengan biaya optimal sebesar Rp 68,-*

### B. Masalah Maximalisasi (untuk kasus normal)

Sebuah perusahaan memiliki 5 orang karyawan yang harus menyelesaikan 5 pekerjaan yang berbeda. Karena sifat pekerjaan dan juga ketrampilan, karakteristik dari masing-masing karyawan, produktifitas atau keuntungan yang timbul dari berbagai alternatif penugasan dari ke-5 karyawan tersebut juga berbeda, seperti terlihat dari tabel / matrik penugasan berikut ini :

Pekerjaan Karyawan	Pekerjaan				
	I	II	III	IV	V
A	10	12	10	8	15
B	14	10	9	15	13
C	9	8	7	8	12
D	13	15	8	16	11
E	10	13	14	11	17

*Catatan : Nilai-nilai dalam tabel tersebut dalam rupiah.*

Dari kasus penugasan tersebut di atas, penyelesaiannya adalah :

### Langkah 1

Mencari produktifitas atau keuntungan terbesar untuk setiap baris, dan kemudian nilai tersebut dikurangi dengan semua nilai produktifitas yang ada pada baris yang sama. Dengan langkah ini hasil yang diperoleh adalah :

5	3	5	7	0
1	5	6	0	2
3	4	5	4	0
3	1	8	0	5
7	4	3	6	0

### Langkah 2

Memastikan semua baris dan kolom sudah memiliki nilai nol. Dan ternyata masih ada kolom yang belum memiliki nilai nol, yakni kolom 3. Dengan demikian perlu dicari nilai terkecil pada kolom tersebut untuk selanjutnya digunakan untuk mengurangkan semua nilai yang ada pada kolom tersebut, sehingga akan menjadi :

4	2	2	7	0
0	4	3	0	2
2	3	2	4	0
2	0	5	0	5
6	3	0	6	0

Nah, sekarang setiap baris dan kolom sudah memiliki nilai nol, maka langkah selanjutnya adalah :

### Langkah 3

Langkah selanjutnya adalah memastikan atau mengecek apakah dalam tabel penugasan tersebut, telah berhasil ditemukan nilai nol, sebanyak sumber daya (bisa karyawan, mesin, alat transportasi, atau sumber daya lainnya) yang juga tercermin dengan jumlah barisnya. Misalnya bila yang akan ditugaskan adalah 5 karyawan, maka harus ditemukan nilai nol sebanyak 5 buah yang terletak di baris dan kolom yang berbeda. Sebaiknya dimulai dari baris yang hanya memiliki 1 nilai nol. Langkah ini mengandung arti bahwa setiap karyawan hanya dapat ditugaskan pada satu pekerjaan saja.

**Perhatikan !** Dari matrik di atas ternyata nilai nol yang ditemukan dalam baris 1 dan 3, meskipun berbeda baris namun masih berada dalam kolom yang sama, sehingga dapat dipastikan masalah belum optimal dan perlu dilanjutkan ke langkah berikutnya.

### Langkah 4

Karena belum optimal maka langkah selanjutnya adalah menarik garis yang menghubungkan minimal dua buah nilai nol dalam tabel penugasan tersebut, seperti terlihat pada tabel atau matrik berikut ini :

4	2	2	7	0
0	4	3	0	2
2	3	2	4	0
2	0	5	0	5
6	3	0	6	0

Dari langkah di atas terlihat bahwa garis yang berhasil dibuat adalah empat, dengan menyisakan beberapa nilai yang tidak terkena garis.

**Langkah 5**

Selanjutnya, perhatikan nilai-nilai yang belum terkena garis. Pilih nilai yang paling kecil (dari tabel di atas adalah nilai 2), kemudian nilai 2 tersebut dipergunakan untuk mengurangi nilai-nilai lain yang belum terkena garis, dan gunakan untuk menambah nilai-nilai yang terkena garis dua kali. Dengan langkah ini hasilnya adalah :

2	0	0	5	0
0	4	3	0	4
0	1	0	2	0
2	0	5	0	7
6	3	0	6	2

Perhatikan ! semua nilai yang tidak terkena garis nilainya akan berkurang sebesar (2) atau nilai terkecil dari nilai yang belum terkena garis sebelumnya. Sementara itu nilai 2, 5 dan 0 pada kolom 5 akan bertambah 2, karena kedua nilai tersebut terkena garis dua kali.

**Langkah 6**

Dari hasil langkah di atas tersebut, apakah sekarang telah berhasil ditemukan nilai nol sejumlah atau sebanyak sumber daya (bisa karyawan, mesin, alat transportasi, atau sumber daya lainnya) yang juga tercermin dengan jumlah barisnya (mulai dari baris yang hanya memiliki 1 nilai nol à yakni baris ke-5)? Dari tabel atau matrik di atas ternyata telah berhasil ditemukan 5 nilai nol ( sejumlah karyawan yang akan ditugaskan), yang berada di baris dan kolom yang berbeda.

2	0	0	5	0
0	4	3	0	4
0	1	0	2	0
2	0	5	0	7
6	3	0	6	2

Dari hasil di atas dapat dikatakan bahwa kasus penugasan tersebut telah optimal, dengan alokasi penugasan sebagai berikut :

Karyawan A ditugaskan mengerjakan pekerjaan II dengan biaya	Rp 12,-
Karyawan B ditugaskan mengerjakan pekerjaan I dengan biaya	Rp 14,-
Karyawan C ditugaskan mengerjakan pekerjaan V dengan biaya	Rp 12,-
Karyawan D ditugaskan mengerjakan pekerjaan IV dengan biaya	Rp 16,-
Karyawan C ditugaskan mengerjakan pekerjaan III dengan biaya	Rp 14,-
	----- +
<b>Total biaya</b>	<b>Rp 68,-</b>

Namun demikian, alternatif lain dari penugasan di atas dapat dipilih seperti terlihat pada tabel berikut ini :

2	0	0	5	0
0	4	3	0	4
0	1	0	2	0
2	0	5	0	7
6	3	0	6	2

Karyawan A ditugaskan mengerjakan pekerjaan V dengan biaya	Rp 15,-
Karyawan B ditugaskan mengerjakan pekerjaan IV dengan biaya	Rp 15,-
Karyawan C ditugaskan mengerjakan pekerjaan I dengan biaya	Rp 9,-
Karyawan D ditugaskan mengerjakan pekerjaan II dengan biaya	Rp 15,-
Karyawan C ditugaskan mengerjakan pekerjaan III dengan biaya	Rp 14,-
	----- +
Total biaya	Rp 68,-

*Dengan demikian dapat disimpulkan bahwa dengan metode Hungarian, kasus penugasan dalam perusahaan di atas dapat diselesaikan dengan biaya optimal sebesar Rp 68,-*

### Catatan :

Dalam praktek sehari-hari, tidak semua masalah penugasan memiliki matrix biaya atau keuntungan seperti dalam dua contoh kasus di atas. Ada kalanya seorang karyawan misalnya, tidak dapat dialokasikan atau ditugaskan untuk sebuah pekerjaan tertentu (karena alasan, usia, jenis kelamin, ketrampilan yang tidak memadai, kondisi fisik, atau karena sebab lainnya). Dengan demikian karyawan dengan keterbatasan seperti itu tidak dapat dipaksakan mengerjakan sebuah pekerjaan yang memang tidak mungkin baginya.

Untuk mengatasi hal semacam ini, maka dalam proses penyelesaiannya, perlu ditambahkan sebuah bilangan yang sangat besar, dan disebut dengan bilangan M (untuk masalah minimalisasi) dan  $-M$  (untuk masalah maksimalisasi). Proses penyelesaian selanjutnya dapat dilakukan dengan cara yang sama seperti pada kasus penugasan yang normal, hanya saja pada keputusan optimalnya akan dihindari menugaskan karyawan pada tugas yang memiliki bilangan M atau  $-M$  tersebut.