

Bab IV

Masalah Transportasi

Masalah transportasi berkaitan dengan keterbatasan sumber daya atau kapasitas perusahaan yang harus didistribusikan ke berbagai tujuan, kebutuhan atau aktivitas. Dengan demikian manfaat utama dari mempelajari masalah transportasi ini adalah mengoptimalkan distribusi sumberdaya tersebut sehingga mendapatkan hasil atau biaya yang optimal.

Dalam masalah transportasi, secara umum penyelesaian masalah dilakukan dengan dua tahap, yakni :

Tahap 1, dengan penyelesaian awal, dimana metode yang dapat digunakan adalah :

- Metode NWC (North West Corner)
- Metode LC (Least Cost)
- Metode VAM (Vogel Aproximation Method)
- Metode RAM (Russel Aproximation Method)

Tahap 2, Penyelesaian akhir, dengan metode :

- Stepping Stone
- MODI (Modified Distribution)

Metode MODI sebenarnya merupakan modifikasi dari metode Stepping Stone yang sudah ada sebelumnya.

Namun demikian, langkah kedua akan digunakan penuh apabila dalam langkah pertama (penyelesaian awal), masalahnya belum dapat dioptimalka.

Untuk mendapatkan gambaran dari masalah ini, perhatikan contoh berikut ini.

Sebuah perusahaan saat ini beroperasi dengan 3 buah pabrik yang memiliki kapasitas masing-masing sebagai berikut :

Pabrik	Kapasitas produksi tiap bulan
Pabrik 1	90 ton
Pabrik 2	60 ton
Pabrik 3	50 ton
Total	200 ton

Saat ini ada kebutuhan dari tiga kota besar yang harus dipenuhi, dengan besaran permintaan masing-masing kota :

Kota	Kapasitas produksi tiap bulan
A	50 ton
B	110 ton
C	40 ton
Total	200 ton

Perhatikan ! bahwa antara kapasitas pabrik/sumber daya perusahaan dan kebutuhan masing-masing kota adalah sama, yakni sebesar 200 ton. Apabila dijumpai kasus semacam ini, maka kasus yang sedang dihadapi adalah normal.

Perkiraan biaya transportasi dari setiap pabrik ke masing-masing kota adalah :

Dari pabrik 1 ke kota A = 20	Dari pabrik 3 ke kota A = 25
Dari pabrik 1 ke kota B = 5	Dari pabrik 3 ke kota A = 10
Dari pabrik 1 ke kota C = 8	Dari pabrik 3 ke kota A = 19
Dari pabrik 2 ke kota A = 15	
Dari pabrik 2 ke kota B = 20	
Dari pabrik 2 ke kota C = 10	

Pertanyaannya adalah :

1. Bagaimana distribusi sumber daya atau kapasitas perusahaan yang paling optimal, guna memenuhi kebutuhan dari ketiga kota besar tersebut ?
2. Berapakan total biaya optimal yang harus dikeluarkan perusahaan dalam memenuhi kebutuhan ketiga kota tersebut ?

Jawab :

Untuk menyelesaikan masalah tersebut di atas dan apabila dikaitkan dengan metode penyelesaian yang dapat digunakan, maka kemungkinan kombinasi metode yang digunakan adalah sebagai berikut :

Alternatif	Kombinasi metode yang dapat digunakan
1	NWC – Stepping Stone
2	LC – Stepping Stone
3	VAM – Stepping Stone
4	Russel – Stepping Stone
5	NWC – MODI
6	LC – MODI
7	VAM – MODI
8	Russel - MODI

Penggunaan alternatif di atas hanya dapat digunakan apabila dalam penyelesaian awal, hasil optimal belum ditemukan.

Sebelumnya, masalah atau kasus di atas perlu disederhanakan terlebih dahulu dalam tabel transportasi, seperti terlihat di bawah ini :

Dari \ Ke-	Kota A	Kota B	Kota C	Kapasitas
Pabrik 1	20	5	8	90
Pabrik 2	15	20	10	60
Pabrik 3	25	10	19	50
Kebutuhan	50	110	40	200

Perhatikan, bahwa :

1. Selanjutnya tabel di atas akan disebut dengan tabel transportasi
2. Kolom, umumnya mewakili daerah atau tempat tujuan distribusi
3. Baris, umumnya mewakili sumber daya yang dimiliki perusahaan
4. Selanjutnya yang dimaksud dengan sel C11 adalah baris 1 (pabrik 1) dan kolom 1 (kota A), sel C12 adalah baris 1 (pabrik 1) dan kolom 2 (kota B), dst.
5. Angka yang terdapat pada pojok kanan atas setiap sel menunjukkan biaya transportasi di sel tersebut.

Alternatif 1 : Kombinasi NWC dan Stepping Stone

Penggunaan metode NWC, sesuai namanya North West Corner penyelesaian selalu akan dimulai dari pojok kiri atas (north west) dari tabel transportasi. Dengan demikian hasil dari metode ini berturut-turut sebagai berikut :

Dari \ Ke-	Kota A	Kota B	Kota B	Kapasitas	
Pabrik 1	50	20	5	8	90
Pabrik 2	15	20	10	60	
Pabrik 3	25	10	19	50	
Kebutuhan	50	110	40	200	

Langkah 1

Dari \ Ke-	Kota A	Kota B	Kota B	Kapasitas		
Pabrik 1	50	20	40	5	8	90
Pabrik 2	15	20	10	60		
Pabrik 3	25	10	19	50		
Kebutuhan	50	110	40	200		

Langkah 2

Prinsipnya, sebelum kebutuhan kota A ‘beres’ jangan memenuhi kebutuhan kota B, dst. Sebelum kapasitas Pabrik 1 habis, jangan gunakan kapasitas dari Pabrik 2, dst.

Langkah 1 : Penuhi kebutuhan kota A (50) dengan kapasitas dari Pabrik 1 (90, sisa 40)

Langkah 2 : Lanjutkan dengan memenuhi kebutuhan kota B (110) dengan sisa kapasitas Pabrik 1 (yang sebelumnya/pada langkah 1 masih sisa 40) → masih kurang 70

Dari \ Ke-	Kota A		Kota B		Kapasitas
	20	5	8		
Pabrik 1	50	40		90	
Pabrik 2	15	60	10	60	
Pabrik 3	25	10	19	50	
Kebutuhan	50	110	40	200	

Langkah 3

Dari \ Ke-	Kota A		Kota B		Kapasitas
	20	5	8		
Pabrik 1	50	40		90	
Pabrik 2	15	60	10	60	
Pabrik 3	25	10	19	50	
Kebutuhan	50	110	40	200	

Langkah 4

Langkah 3 : Lanjutkan memenuhi kebutuhan kota B (masih kurang 70) dengan menggunakan kapasitas dari Pabrik 2 (60), karena sebelumnya hanya dipenuhi dengan sisa kapasitas Pabrik 1 sebesar 40. \hat{a} inipun masih kurang 10

Langkah 4 : Penuhi kekurangan kebutuhan kota B (kurang 10) dengan menggunakan kapasitas dari Pabrik 3 sebanyak 10 \hat{a} kapasitas Pabrik 3 tinggal 40

Dari \ Ke-	Kota A		Kota B		Kapasitas
	20	5	8		
Pabrik 1	50	40		90	
Pabrik 2	15	60	10	60	
Pabrik 3	25	10	40	50	
Kebutuhan	50	110	40	200	

Langkah 5

Langkah 5 : Karena kebutuhan kota B sudah 'beres', gunakan sisa kapasitas Pabrik 3 untuk memenuhi kebutuhan kota C yang kebutuhannya juga sebesar 40 \hat{a} sama persis dengan kapasitas yang tersisa di Pabrik 3

Perhatikan tabel transportasi pada langkah ke-5 di atas. Dengan menggunakan metode NWC, yang dimulai dari pojok kiri atas, saat ini kebutuhan semua kota dan kapasitas semua pabrik telah terpenuhi dan habis. Dari tabel tersebut alokasi atau pendistribusian yang terjadi adalah :

Pabrik 1 akan melayani/mengirim ke kota A sebanyak 50 ton dan kota B sebanyak 40 ton
Pabrik 2 hanya akan melayani/mengirim ke kota B sebanyak 60 ton
Pabrik 3 akan melayani/mengirim ke kota B sebanyak 10 ton dan kota C sebanyak 40 ton

Pertanyaan yang muncul adalah :

1. Sudah benarkah tabel yang dihasilkan sampai dengan langkah ke-5 tersebut ? \hat{a} untuk memastikannya, perlu dicek kembali :
 - Apakah semua alokasi kalau dijumlah ke bawah dan kesamping sudah cocok dengan kebutuhan setiap kota dan jumlah kapasitas yang tersedia ?
 - Apakah jumlah sel yang terisi sudah memenuhi syarat yang ada $(m+n)-1$, atau (jumlah kolom+jumlah baris) - 1 = $(3+3) - 1 = 5$ sel terisi ?
 - Jika jawaban dari keduanya adalah 'ya' maka tabel tersebut sudah benar.

2. Dari pendistribusi produk perusahaan tersebut, apakah biaya transportasi yang dikeluarkan perusahaan sudah optimal, dalam arti sudah paling minimal ?

Untuk mengetahuinya, dicoba hitung masing-masing biaya pendistribusian tersebut yakni:

Biaya mengirim 50 ton dari P1 ke kota A	= 50 x 20	= 1000
Biaya mengirim 50 ton dari P1 ke kota B	= 40 x 5	= 200
Biaya mengirim 50 ton dari P2 ke kota B	= 60 x 20	= 1200
Biaya mengirim 50 ton dari P1 ke kota A	= 10 x 10	= 100
Biaya mengirim 50 ton dari P1 ke kota A	= 40 x 19	= 760
	----- +	
Total biaya pengirimannya		= 3260

Sudahkah biaya sebesar Rp 3260 tersebut optimal (paling kecil ?)

Untuk mengetahuinya perlu dilakukan pengujian terhadap alokasi distribusi seperti pada langkah 5 sebelumnya. Mungkinkah dengan menggeser alokasi, biaya bisa diturunkan lagi ?

Dari \ Ke-	Kota A	Kota B	Kota C	Kapasitas
Pabrik 1	50 20	5	8	90
Pabrik 2	15	60 20	10	
Pabrik 3	25	10 10	40 19	50
Kebutuhan	50	110	40	200

Note: Red arrows in the original image indicate a cycle: P1 to B (40), B to C (5), C to P3 (40), and P3 to A (10).

Atau

Dari \ Ke-	Kota A	Kota B	Kota C	Kapasitas
Pabrik 1	20	5	(+) 8	90
Pabrik 2	15	20	10	
Pabrik 3	25	(+) 10	(-) 19	50
Kebutuhan	50	110	40	200

Note: Red arrows in the original image indicate a cycle: P1 to C (+8), C to P3 (-19), P3 to B (+10), and B to P1 (-5).

Langkah Pengujian :

Langkah 1 :

Menguji sel-sel yang masih kosong, apakah masih bisa memiliki nilai negatif atau tidak, artinya masih bisa menurunkan biaya transportasi atau tidak.

Sel yang diuji adalah : Sel C13, C21, C23, dan C31. Pengujian dilakukan pada setiap sel kosong tersebut dengan menggunakan metode **Stepping Stone**. Pada metode ini, pengujian dilakukan mulai dari sel kosong tersebut, selanjutnya bergerak (boleh searah jarum jam dan boleh berlawanan) secara lurus/tidak boleh diagonal, ke arah sel yang telah terisi dengan alokasi, begitu seterusnya sampai kembali ke sel kosong tersebut. Setiap pergerakan ini akan mengurangi dan menambah secara bergantian biaya pada sel kosong tersebut. **Perhatikan tanda panah dan tanda (+)/(-) nya !!!**

Untuk lebih jelasnya perhatikan contoh berikut ini.

Untuk pengujian sel C13 = biayanya 8, bergerak ke sel C33 (bisa juga ke C12, tapi tidak bisa ke C11), sehingga dikurangi 19, bergerak lagi ke C32, sehingga ditambah 10, bergerak langsung ke C12, sehingga dikurangi 5 (tidak perlu ke C22, karena bisa langsung ke C12), sehingga hasil akhirnya adalah $8 - 19 + 10 - 5 = -6$

Dari \ Ke-	Kota A	Kota B	Kota C	Kapasitas
Pabrik 1	50 20	5	8	90
Pabrik 2	15	60 20	10	60
Pabrik 3	25	10 10	40 19	50
Kebutuhan	50	110	40	200

Pengujian

- Sel C13 = $8 - 19 + 10 - 5 = -6$
- Sel C21 = $15 - 20 + 5 - 20 = -20$
- Sel C23 = $10 - 19 + 10 - 20 = -19$
- Sel C31 = $25 - 20 + 5 - 10 = 0$

Dari pengujian empat sel tersebut dapat dilihat bahwa masih ada tiga sel yang menghasilkan nilai negatif, dan sel C21 yang memberikan negatif paling besar. Artinya dengan menggeser pengiriman ke sel tersebut, biaya akan dapat diturunkan sebesar Rp 20 (karena -20) per ton-nya.

Dengan demikian perlu dilakukan perubahan alokasi pengiriman dengan langkah 2 selanjutnya :

Langkah 2

Merubah alokasi pengiriman ke sel C21, yang pengujian sebelumnya memiliki pergerakan :

Dari \ Ke-	Kota A	Kota B	Kota C	Kapasitas
Pabrik 1	20	5	8	90
	(-) →	(+) ↓		
Pabrik 2	15	20	10	60
	(+) ←	(-) ↓		
Pabrik 3	25	10	19	50
Kebutuhan	50	110	40	200

Dari pergerakan dan tanda +/- yang ada, perhatikan sel yang bertanda minus saja, yakni sel C11 dan sel C22. Dari kedua sel bertanda pergerakan minus ini, pilih sel yang alokasi pengiriman sebelumnya memiliki alokasi paling kecil. Dan ternyata sel C11, dengan alokasi sebelumnya 50 ton, dan ini lebih kecil dari alokasi sel C22 yang 60 ton.

Selanjutnya angka 50 ton di sel C11 tersebut digunakan untuk mengurangi atau menambah alokasi yang ada selama pengujian (sesuai tanda pada pergerakan pengujian). Dengan demikian dapat dihasilkan tabel transportasi sebagai berikut :

Dari \ Ke-	Kota A	Kota B	Kota C	Kapasitas
Pabrik 1	20	90	8	90
Pabrik 2	50	10	10	60
Pabrik 3	25	10	40	50
Kebutuhan	50	110	40	200

Perhatikan !!!

Sel C11 menjadi 0 karena $50 - 50 = 0$

Sel C12 menjadi 90 karena $40 + 50 = 90$

Sel C22 menjadi 10 karena $60 - 50 = 10$

Sel C21 menjadi 50 karena $0 + 50 = 50$

Nilai alokasi pada sel C32 dan C33 tidak mengalami perubahan karena tidak termasuk dalam pergerakan pengujian sel C21 tersebut.

Sekali lagi lakukan pengecekan :

- Apakah semua alokasi kalau dijumlah ke bawah dan kesamping sudah cocok dengan kebutuhan setiap kota dan jumlah kapasitas yang tersedia ?
- Apakah jumlah sel yang terisi sudah memenuhi syarat yang ada $(m+n)-1$, atau (jumlah kolom+jumlah baris) – 1 = (3+3) – 1 = 5 sel terisi ?
- Jika jawaban dari keduanya adalah ‘ya’ maka tabel tersebut sudah benar.

Sudahkah alokasi menjadi optimal ?

Untuk mengetahuinya, perlu kembali dilakukan pengecekan terhadap sel-sel yang masih kosong, apakah masih ada yang bernilai negatif atau tidak.

Dari tabel di atas, sel yang masih kosong adalah sel C11, C13, C23, dan C31.

Pengujian terhadap sel-sel kosong tersebut dilakukan dengan cara yang sama seperti pengujian sel kosong sebelumnya, sehingga diperoleh hasil pengecekan sebagai berikut :

Ke- Dari	Kota A	Kota B	Kota C	Kapasitas
Pabrik 1	20	90 5	8	90
Pabrik 2	50 15	10 20	10	60
Pabrik 3	25	10 10	40 19	50
Kebutuhan	50	110	40	200

Pengujian

$$\text{Sel C11} = 20 - 5 + 20 - 15 = 20 \text{ à (menjadi lebih mahal 20/ton)}$$

$$\text{Sel C13} = 8 - 19 + 10 - 5 = -6$$

$$\text{Sel C23} = 10 - 19 + 10 - 20 = -19$$

$$\text{Sel C31} = 25 - 15 + 20 - 10 = 20 \text{ à (menjadi lebih mahal 20/ton)}$$

Dari hasil pengujian tersebut, ternyata sel C23 masih dapat memberikan penurunan biaya sebesar RP 19/ton. Dengan demikian memang perlu dilakukan perubahan alokasi pengiriman, dengan mencoba mengalokasikan pengiriman ke sel C23 dengan langkah :

Langkah 3

Merubah alokasi pengiriman ke sel C23, yang pengujian sebelumnya memiliki pergerakan :

Dari \ Ke-	Kota A	Kota B	Kota C	Kapasitas
Pabrik 1	20	5	8	90
Pabrik 2	15	(-) 20	(+) 10	60
Pabrik 3	25	(+) 10	(-) 19	50
Kebutuhan	50	110	40	200

Dari pergerakan dan tanda +/- yang ada, perhatikan sel yang bertanda minus saja, yakni sel C22 dan sel C33. Dari kedua sel bertanda minus ini, pilih sel yang alokasi pengiriman sebelumnya memiliki alokasi paling kecil. Dan ternyata sel C22, dengan alokasi sebelumnya 10 ton, dan ini lebih kecil dari alokasi sel C22 yang 40 ton.

Selanjutnya angka 10 ton di sel C22 tersebut digunakan untuk mengurangi atau menambah alokasi yang ada selama pengujian (sesuai tanda pada pergerakan pengujian). Dengan demikian dapat dihasilkan tabel transportasi sebagai berikut :

Dari \ Ke-	Kota A	Kota B	Kota C	Kapasitas
Pabrik 1	20	90	8	90
Pabrik 2	50	20	10	60
Pabrik 3	25	20	30	50
Kebutuhan	50	110	40	200

Perhatikan !!!

Sel C22 menjadi 0 karena $10 - 10 = 0$

Sel C23 menjadi 90 karena $0 + 10 = 10$

Sel C32 menjadi 20 karena $10 + 10 = 20$

Sel C33 menjadi 50 karena $40 - 10 = 30$

Nilai alokasi pada sel C12 dan C21 tidak mengalami perubahan karena tidak termasuk dalam pergerakan pengujian sel C23 tersebut.

Sekali lagi lakukan pengecekan :

- Apakah semua alokasi kalau dijumlah ke bawah dan kesamping sudah cocok dengan kebutuhan setiap kota dan jumlah kapasitas yang tersedia ?
- Apakah jumlah sel yang terisi sudah memenuhi syarat yang ada $(m+n)-1$, atau (jumlah kolom+jumlah baris) – 1 = (3+3) – 1 = 5 sel terisi ?
- Jika jawaban dari keduanya adalah ‘ya’ maka tabel tersebut sudah benar.

Sudahkah alokasi menjadi optimal ?

Untuk mengetahuinya, perlu kembali dilakukan pengecekan terhadap sel-sel yang masih kosong, apakah masih ada yang bernilai negatif atau tidak.

Dari tabel di atas, sel yang masih kosong adalah sel C11, C13, C22 dan C31.

Pengujian terhadap sel-sel kosong tersebut dilakukan dengan cara yang sama seperti pengujian sel kosong sebelumnya, sehingga diperoleh hasil pengecekan sebagai berikut :

Dari \ Ke-	Kota A	Kota B	Kota C	Kapasitas
Pabrik 1	20	90 5	8	90
Pabrik 2	50 15	20	10	60
Pabrik 3	25	20 10	30 19	50
Kebutuhan	50	110	40	200

Pengujian

$$\text{Sel C11} = 20 - 5 + 10 - 19 + 10 - 15 = 1 \text{ à (menjadi lebih mahal 1/ton)}$$

$$\text{Sel C13} = 8 - 19 + 10 - 5 = -6$$

$$\text{Sel C22} = 20 - 10 + 19 - 10 = 19 \text{ à (lebih mahal 20/ton)}$$

$$\text{Sel C31} = 25 - 15 + 10 - 19 = 1 \text{ à (menjadi lebih mahal 1/ton)}$$

Dari hasil pengujian tersebut, ternyata sel C13 masih dapat memberikan penurunan biaya sebesar RP 6/ton. Dengan demikian memang perlu dilakukan perubahan alokasi pengiriman, dengan mencoba mengalokasikan pengiriman ke sel C13 dengan langkah :

Langkah 4

Merubah alokasi pengiriman ke sel C13, yang pengujian sebelumnya memiliki pergerakan :

Dari \ Ke-	Kota A	Kota B	Kota C	Kapasitas
Pabrik 1	20	5	8	90
		(-) → (+)		
Pabrik 2	15	20	10	60
		↑	↓	
Pabrik 3	25	10	19	50
		(+) ← (-)		
Kebutuhan	50	110	40	200

Dari pergerakan dan tanda +/- yang ada, perhatikan sel yang bertanda minus saja, yakni sel C12 dan sel C33. Dari kedua sel bertanda minus ini, pilih sel yang alokasi pengiriman sebelumnya memiliki alokasi paling kecil. Dan ternyata sel C33, dengan alokasi sebelumnya 30 ton, dan ini lebih kecil dari alokasi sel C12 yang 90 ton.

Selanjutnya angka 30 ton di sel C33 tersebut digunakan untuk mengurangi atau menambah alokasi yang ada selama pengujian (sesuai tanda pada pergerakan pengujian). Dengan demikian dapat dihasilkan tabel transportasi sebagai berikut :

Dari \ Ke-	Kota A	Kota B	Kota C	Kapasitas
Pabrik 1	20	60	30	90
Pabrik 2	50	20	10	60
Pabrik 3	25	50	19	50
Kebutuhan	50	110	40	200

Perhatikan !!!

Sel C12 menjadi 60 karena $90 - 30 = 60$

Sel C13 menjadi 30 karena $0 + 30 = 30$

Sel C32 menjadi 50 karena $20 + 30 = 50$

Sel C33 menjadi 0 karena $30 - 30 = 0$

Nilai alokasi pada sel C21 dan C23 tidak mengalami perubahan karena tidak termasuk dalam pergerakan pengujian sel C13 tersebut.

Sekali lagi lakukan pengecekan :

- Apakah semua alokasi kalau dijumlah ke bawah dan kesamping sudah cocok dengan kebutuhan setiap kota dan jumlah kapasitas yang tersedia ?
- Apakah jumlah sel yang terisi sudah memenuhi syarat yang ada $(m+n)-1$, atau (jumlah kolom+jumlah baris) - 1 = (3+3) - 1 = 5 sel terisi ?
- Jika jawaban dari keduanya adalah 'ya' maka tabel tersebut sudah benar.

Sudahkah alokasi menjadi optimal ?

Untuk mengetahuinya, perlu kembali dilakukan pengecekan terhadap sel-sel yang masih kosong, apakah masih ada yang bernilai negatif atau tidak.

Dari tabel di atas, sel yang masih kosong adalah sel C11, C22, C31 dan C33.

Pengujian terhadap sel-sel kosong tersebut dilakukan dengan cara yang sama seperti pengujian sel kosong sebelumnya, sehingga diperoleh hasil pengecekan sebagai berikut :

Ke- Dari	Kota A	Kota B	Kota C	Kapasitas
Pabrik 1	20	60 5	30 8	90
Pabrik 2	50 15	20	10 10	60
Pabrik 3	25	50 10	19	50
Kebutuhan	50	110	40	200

Pengujian

$$\begin{aligned}
 \text{Sel C11} &= 20 - 8 + 10 - 15 && = 7 \text{ à (menjadi lebih mahal 7/ton)} \\
 \text{Sel C22} &= 20 - 5 + 8 - 10 && = 13 \text{ à (menjadi lebih mahal 13/ton)} \\
 \text{Sel C31} &= 25 - 15 + 10 - 8 + 5 - 10 && = 7 \text{ à (lebih mahal 7/ton)} \\
 \text{Sel C33} &= 19 - 10 + 5 - 8 && = 6 \text{ à (menjadi lebih mahal 6/ton)}
 \end{aligned}$$

Dari hasil pengujian tersebut, ternyata semua sel sudah tidak ada yang bernilai negatif lagi, atau dengan kata lain semua sel sudah tidak dapat memberikan penurunan biaya lagi, sehingga dengan demikian dapat dikatakan kasus telah optimal, dengan total biaya :

$$\begin{aligned}
 \text{Biaya mengirim 60 ton dari P1 ke kota B} &= 60 \times 5 && = 300 \\
 \text{Biaya mengirim 30 ton dari P1 ke kota C} &= 30 \times 8 && = 240 \\
 \text{Biaya mengirim 50 ton dari P2 ke kota A} &= 50 \times 15 && = 750 \\
 \text{Biaya mengirim 10 ton dari P2 ke kota C} &= 10 \times 10 && = 100 \\
 \text{Biaya mengirim 50 ton dari P3 ke kota B} &= 50 \times 10 && = 500 \\
 &&& \text{-----} + \\
 \text{Total biaya pengirimannya} &&& = \mathbf{1890}
 \end{aligned}$$

Alternatif 2 : Kombinasi LC (Least Cost) dan Stepping Stone

Dari contoh kasus di atas sudah diperoleh tabel transportasi sebagai berikut :

Dari \ Ke-	Kota A	Kota B	Kota C	Kapasitas
Pabrik 1	20	5	8	90
Pabrik 2	15	20	10	60
Pabrik 3	25	10	19	50
Kebutuhan	50	110	40	200

Langkah 1

Penyelesaian masalah dengan menggunakan metode Least Cost, sesuai dengan namanya dimulai dengan memilih alokasi atau sel yang memiliki biaya pengiriman atau biaya transportasi yang paling rendah. Apabila diperhatikan dari tabel di atas, sel yang memiliki biaya terkecil adalah sel C12, yakni biayanya 5/ton, maka alokasi pertama dimulai dari sel tersebut, dimana kota yang harus dipenuhi kebutuhannya adalah kota B dan sumber pengirimannya dari Pabrik 1, sehingga alokasinya adalah :

Dari \ Ke-	Kota A	Kota B	Kota C	Kapasitas
Pabrik 1	20	90 5	8	90
Pabrik 2	15	20	10	60
Pabrik 3	25	10	19	50
Kebutuhan	50	110	40	200

Langkah 2 dan selanjutnya

Selanjutnya dicari sel dengan biaya terendah berikutnya, dimana semua sel pada baris 1/pertama tidak diikuti lagi dalam pemilihan, karena kapasitas Pabrik 1 telah habis. Dari sel yang tersisa, dapat diketahui bahwa biaya terendah berikutnya adalah sel C23 atau sel C32 (dengan biaya sama-sama 10). Karena nilai biayanya sama, maka dapat dipilih salah satu dari keduanya. Misalkan dipilih sel C32, artinya kota yang akan dipenuhi kebutuhannya adalah kota B (sebelumnya baru dikirim 90 ton, jadi kurang 20 ton) dengan kapasitas Pabrik 3, sehingga alokasi berikutnya adalah :

Dari \ Ke-	Kota A	Kota B	Kota C	Kapasitas
Pabrik 1	20	90 5	8	90
Pabrik 2	15	20	10	60
Pabrik 3	25	20 10	19	50
Kebutuhan	50	110	40	200

Selanjutnya dipilih sel dengan biaya terendah berikutnya, dimana baris 1 dan kolom 2 tidak dilibatkan lagi. Sel terpilih dengan biaya terendah adalah sel C23, memenuhi kebutuhan kota C dengan kapasitas Pabrik 2. Alokasi yang diberikan di sel C23 tersebut adalah 40 ton, sehingga kapasitas Pabrik 2 hanya tinggal 20 ton.

Dari \ Ke-	Kota A	Kota B	Kota C	Kapasitas
Pabrik 1	20	90 5	8	90
Pabrik 2	15	20	40 10	60
Pabrik 3	25	20 10	19	50
Kebutuhan	50	110	40	200

Karena tinggal kolom satu yang bisa dibandingkan (itupun hanya kolom satu baris 2 dan 3), maka Sel dengan biaya terendah selanjutnya adalah sel C21 (kebutuhan kota A dengan kapasitas Pabrik 2), dan alokasi yang diberikan untuk sel tersebut adalah 20 ton (sisa kapasitas Pabrik 2).

Dari \ Ke-	Kota A	Kota B	Kota C	Kapasitas
Pabrik 1	20	90 5	8	90
Pabrik 2	20 15	20	40 10	60
Pabrik 3	25	20 10	19	50
Kebutuhan	50	110	40	200

Sel terakhir yang dialokasikan adalah sel C31 (kekurangan kebutuhan kota A dengan sisa kapasitas Pabrik 3 sebesar 30 ton), sehingga dengan metode Least Cost ini, alokasi akhirnya adalah :

Dari \ Ke-	Kota A	Kota B	Kota C	Kapasitas
Pabrik 1	20	90	8	90
Pabrik 2	20	20	40	60
Pabrik 3	30	20	19	50
Kebutuhan	50	110	40	200

Untuk mengetahui kebenaran proses ini, lakukan pengecekan :

- Apakah semua alokasi kalau dijumlah ke bawah dan kesamping sudah cocok dengan kebutuhan setiap kota dan jumlah kapasitas yang tersedia ?
- Apakah jumlah sel yang terisi sudah memenuhi syarat yang ada $(m+n)-1$, atau (jumlah kolom+jumlah baris) - 1 = (3+3) - 1 = 5 sel terisi ?
- Jika jawaban dari keduanya adalah 'ya' maka tabel tersebut sudah benar.

Namun demikian, sudahkah alokasi pada tabel di atas sudah optimal ?

Langkah 3 dan selanjutnya

Untuk mengetahuinya, perlu dilakukan pengecekan terhadap sel-sel yang masih kosong, apakah masih ada yang bernilai negatif atau tidak.

Dari tabel di atas, sel yang masih kosong adalah sel C11, C13, 22, dan C33.

Pengujian terhadap sel-sel kosong tersebut dilakukan dengan cara yang sama seperti pengujian sel kosong sebelumnya, sehingga diperoleh hasil pengecekan sebagai berikut :

Pengujian

$$\begin{aligned}
 \text{Sel C11} &= 20 - 5 + 10 - 25 &= 0 \\
 \text{Sel C13} &= 8 - 10 + 15 - 25 + 10 - 5 &= -7 \hat{a} \text{ (penurunan biaya terb esar)} \\
 \text{Sel C22} &= 20 - 10 + 25 - 15 &= 20 \\
 \text{Sel C33} &= 19 - 25 + 15 - 10 &= -1
 \end{aligned}$$

Dari hasil pengujian tersebut, ternyata sel C13 masih dapat memberikan penurunan biaya sebesar RP 7/ton. Dengan demikian memang perlu dilakukan perubahan alokasi pengiriman, dengan mencoba mengalokasikan pengiriman ke sel C33 dengan langkah :

Langkah 3

Merubah alokasi pengiriman ke sel C13, yang pengujian sebelumnya memiliki pergerakan :

Dari \ Ke-	Kota A	Kota B	Kota C	Kapasitas
Pabrik 1	20	5	8	90
		(-) ← (+)		
Pabrik 2	15	20	10	60
	(+) ← (-)			
Pabrik 3	25	10	19	50
	(-) → (+)			
Kebutuhan	50	110	40	200

Dari pergerakan dan tanda +/- yang ada, perhatikan sel yang bertanda minus saja, yakni sel C12, C23 dan sel C31. Dari ketiga sel bertanda pergerakan minus ini, pilih sel yang alokasi pengiriman sebelumnya memiliki alokasi paling kecil. Dan ternyata sel C31, dengan alokasi sebelumnya 30 ton, dan ini lebih kecil dari alokasi sel C12 yang 90 ton, dan sel 23 yang 40 ton.

Selanjutnya angka 30 ton di sel C31 tersebut digunakan untuk mengurangi dan menambah alokasi yang ada selama pengujian (sesuai tanda pada pergerakan pengujian). Dengan demikian dapat dihasilkan tabel transportasi sebagai berikut :

Dari \ Ke-	Kota A	Kota B	Kota C	Kapasitas	
Pabrik 1	20	60	5	30	90
Pabrik 2	50	15	20	10	60
Pabrik 3	25	50	10	19	50
Kebutuhan	50	110	40	200	

Untuk mengetahui kebenaran proses ini, lakukan pengecekan :

- Apakah semua alokasi kalau dijumlah ke bawah dan kesamping sudah cocok dengan kebutuhan setiap kota dan jumlah kapasitas yang tersedia ?
- Apakah jumlah sel yang terisi sudah memenuhi syarat yang ada $(m+n)-1$, atau $(\text{jumlah kolom} + \text{jumlah baris}) - 1 = (3+3) - 1 = 5$ sel terisi ?
- Jika jawaban dari keduanya adalah 'ya' maka tabel tersebut sudah benar.

Namun demikian, sudahkah alokasi pada tabel di atas sudah optimal ?

Untuk mengetahuinya, perlu kembali dilakukan pengecekan terhadap sel-sel yang masih kosong, apakah masih ada yang bernilai negatif atau tidak.

Dari tabel di atas, sel yang masih kosong adalah sel C11, C22, C31 dan C33.

Pengujian terhadap sel-sel kosong tersebut dilakukan dengan cara yang sama seperti pengujian sel kosong sebelumnya, sehingga diperoleh hasil pengecekan sebagai berikut :

Pengujian

Sel C11	= 20 – 8 + 10 – 15	= 7 à (menjadi lebih mahal 7/ton)
Sel C22	= 20 – 5 + 8 – 10	= 13 à (menjadi lebih mahal 13/ton)
Sel C31	= 25 – 15 + 10 – 8 + 5 - 10	= 7 à (lebih mahal 7/ton)
Sel C33	= 19 – 10 + 5 – 8	= 6à (menjadi lebih mahal 6/ton)

Dari hasil pengujian tersebut, ternyata semua sel sudah tidak ada yang bernilai negatif lagi, atau dengan kata lain semua sel sudah tidak dapat memberikan penurunan biaya lagi, sehingga dengan demikian dapat dikatakan kasus telah optimal, dengan total biaya :

Biaya mengirim 60 ton dari P1 ke kota B	= 60 x 5	= 300
Biaya mengirim 30 ton dari P1 ke kota C	= 30 x 8	= 240
Biaya mengirim 50 ton dari P2 ke kota A	= 50 x 15	= 750
Biaya mengirim 10 ton dari P2 ke kota C	= 10 x 10	= 100
Biaya mengirim 50 ton dari P3 ke kota B	= 50 x 10	= 500
		----- +
Total biaya pengirimannya		= 1890

Hasil ini dengan yang diperoleh apabila digunakan metode NWC sebelumnya.

Alternatif 3 : Kombinasi metode VAM (Vogel Aproximation Method) dan Stepping Stone

Langkah 1

Dengan kasus yang sama, penyelesaian kasus dengan metode VAM alokasi dimulai dengan mencari selisih antara biaya terendah pertama dan kedua, dari setiap baris dan kolom pada tabel transportasinya. Sebagai contoh, untuk baris 1, biaya terendah pertama adalah 5 dan terendah kedua adalah 8, sehingga selisihnya adalah 3, begitu seterusnya sampai kolom ke-3. Dari tabel transportasi yang ada dapat diperoleh hasil :

Baris 1	à 8 – 5	= 3
Baris 2	à 15 – 10	= 5
Baris 3	à 19 – 10	= 9 à (dipilih karena memiliki selisih terbesar)
Kolom 1	à 20 – 15	= 5
Kolom 2	à 10 – 5	= 5
Kolom 3	à 10 -8	= 2

Dari perhitungan di atas dapat disimpulkan bahwa alokasi pertama akan diberikan pada baris 3, karena memiliki selisih terbesar. Pertanyaannya adalah, di baris 3 ada tiga sel, sel mana yang akan dialokasinya terlebih dahulu ?

Tentu saja alokasi akan diberikan kepada sel yang biayanya paling rendah di baris 3 tersebut, yakni sel C32 (kebutuhan kota B dengan kapasitas Pabrik 3). Dengan demikian alokasi pertama dengan metode VAM ini adalah dengan mengirim sejumlah 50 ke kota B, dan masih kurang 60 ton, karena kapasitas Pabrik 3 hanya 50, sementara kebutuhan kota B 110 ton :

Dari \ Ke-	Kota A	Kota B	Kota C	Kapasitas
Pabrik 1	20	5	8	90
Pabrik 2	15	20	10	60
Pabrik 3	25	50	19	50
Kebutuhan	50	110	40	200

Langkah 2

Alokasi kedua berikutnya dilakukan dengan cara yang sama, yakni dengan mencari selisih antara biaya terendah pertama dan kedua, di setiap baris dan kolom pada tabel transportasinya. Sebagai catatan, baris ketiga tidak diikuti lagi karena kapasitas pabrik 3 telah habis. Dengan demikian, hasil perhitungan selisih menghasilkan :

Baris 1 à $8 - 5 = 3$
 Baris 2 à $15 - 10 = 5$
 Baris 3 à tidak perlu dihitung lagi, kapasitas Pabrik 3 sdh habis
 Kolom 1 à $20 - 15 = 5$
 Kolom 2 à $20 - 5 = 15$ à dipilih karena memiliki selisih terbesar
 Kolom 3 à $10 - 8 = 2$

Dari perhitungan di atas dapat disimpulkan bahwa alokasi kedua akan diberikan pada kolom 2, karena memiliki selisih terbesar. Pertanyaannya adalah, di Kolom 2 ada dua sel, sel mana yang akan dialokasinya terlebih dahulu ?

Tentu saja alokasi akan diberikan kepada sel yang biayanya paling rendah di kolom 2 tersebut, yakni sel C12 (kebutuhan kota B dengan kapasitas Pabrik 1). Dengan demikian alokasi selanjutnya dengan metode VAM ini adalah dengan mengirim sejumlah 60 ton ke kota B (kekurangan kebutuhan kota B), à karena kapasitas Pabrik 1 ada 90 ton, saat ini kapasitas Pabrik 1 tinggal 30 ton,. Hasil alokasi sampai tahap ini adalah :

Dari \ Ke-	Kota A	Kota B	Kota C	Kapasitas
Pabrik 1	20	60 5	8	90
Pabrik 2	15	20	10	60
Pabrik 3	25	50 10	19	50
Kebutuhan	50	110	40	200

Dengan alokasi seperti di atas, Baris 3 dan Kolom 2 tidak perlu dicari selisihnya lagi, karena kapasitas Pabrik 3 sudah habis, dan kebutuhan kota B sudah terpenuhi semua.

Langkah 3

Dengan demikian perhitungan selisih untuk menentukan alokasi berikutnya adalah :

- Baris 1 à $20 - 8 = 12$ à dipilih karena memiliki selisih terbesar
- Baris 2 à $15 - 10 = 5$
- Baris 3 à tidak perlu dihitung lagi, kapasitas Pabrik 3 sdh habis
- Kolom 1 à $20 - 15 = 5$
- Kolom 2 à tidak perlu dihitung lagi, karena kebutuhan kota B sudah terpenuhi
- Kolom 3 à $10 - 8 = 2$

Dari perhitungan di atas dapat disimpulkan bahwa alokasi ketiga akan diberikan pada baris 1, karena memiliki selisih terbesar. Pertanyaannya adalah, di baris 1 ada dua sel, sel mana yang akan dialokasinya terlebih dahulu ? Tentu saja alokasi akan diberikan kepada sel yang biayanya paling rendah di baris 1 tersebut, yakni sel C13 (kebutuhan kota C dengan kapasitas Pabrik 1). Dengan demikian alokasi selanjutnya dengan metode VAM ini adalah dengan mengirim sejumlah 30 ton ke kota C (karena sisa kapasitas Pabrik 1 tinggal 30 ton), Hasil alokasi sampai tahap ini adalah :

Dari \ Ke-	Kota A	Kota B	Kota C	Kapasitas
Pabrik 1	20	60 5	30 8	90
Pabrik 2	15	20	10	60
Pabrik 3	25	50 10	19	50
Kebutuhan	50	110	40	200

Dengan alokasi seperti di atas, Baris 1, Baris 3 ,dan Kolom 2 tidak perlu dicari selisihnya lagi, karena kapasitas Pabrik 1 dan 3 sudah habis, dan kebutuhan kota B sudah terpenuhi semua.

Langkah 3

Dengan demikian perhitungan selisih untuk menentukan alokasi berikutnya adalah :

- Baris 1 à tidak perlu dihitung lagi, kapasitas Pabrik 1 sdh habis
- Baris 2 à $15 - 10 = 5$
- Baris 3 à tidak perlu dihitung lagi, kapasitas Pabrik 3 sdh habis
- Kolom 1 à tidak bisa dihitung, karena kapasitas Pabrik 1 dan 3 habis
- Kolom 2 à tidak perlu dihitung lagi, karena kebutuhan kota B sudah terpenuhi
- Kolom 3 à tidak bisa dihitung, karena kapasitas Pabrik 1 dan 3 habis

Dari perhitungan di atas dapat disimpulkan bahwa alokasi keempat akan diberikan pada baris 2, karena merupakan satu-satunya baris yang bisa dihitung selisihnya. Pertanyaannya adalah, di baris 2 masih ada dua sel, sel mana yang akan dialokasinya terlebih dahulu ?

Tentu saja alokasi akan diberikan kepada sel yang biayanya paling rendah di baris 2 tersebut, yakni sel C23 (kebutuhan kota C dengan kapasitas Pabrik 2). Dengan demikian alokasi selanjutnya dengan metode VAM ini adalah dengan mengirim dari Pabrik 2 sejumlah 10 ton ke kota C (karena kebutuhan kota C tinggal kurang 10 ton, 30 ton sebelumnya sudah dikirim dari Pabrik 1). Hasil alokasi sampai tahap ini adalah :

Dari \ Ke-	Kota A	Kota B	Kota C	Kapasitas
Pabrik 1	20	60	30	90
Pabrik 2	15	20	10	60
Pabrik 3	25	50	19	50
Kebutuhan	50	110	40	200

Dengan alokasi seperti di atas, tentunya tidak perlu dilakukan perhitungan selisih biaya terendah pertama dan kedua lagi, karena tinggal memenuhi kebutuhan kota A saja sebesar 50 ton dari kapasitas Pabrik 2 yang memang tinggal 50 ton, sehingga alokasi terakhirnya adalah :

Dari \ Ke-	Kota A	Kota B	Kota C	Kapasitas
Pabrik 1	20	60 5	30 8	90
Pabrik 2	50 15	20	10 10	60
Pabrik 3	25	50 10	19	50
Kebutuhan	50	110	40	200

Untuk mengetahui kebenaran proses ini, lakukan pengecekan :

- Apakah semua alokasi kalau dijumlah ke bawah dan kesamping sudah cocok dengan kebutuhan setiap kota dan jumlah kapasitas yang tersedia ?
- Apakah jumlah sel yang terisi sudah memenuhi syarat yang ada $(m+n)-1$, atau (jumlah kolom+jumlah baris) – 1 = (3+3) – 1 = 5 sel terisi ?
- Jika jawaban dari keduanya adalah ‘ya’ maka tabel tersebut sudah benar.

Namun demikian, sudahkah alokasi pada tabel di atas sudah optimal ?

Untuk mengetahuinya, perlu kembali dilakukan pengecekan terhadap sel-sel yang masih kosong, apakah masih ada yang bernilai negatif atau tidak.

Dari tabel di atas, sel yang masih kosong adalah sel C11, C22, C31 dan C33.

Pengujian terhadap sel-sel kosong tersebut dilakukan dengan cara yang sama seperti pengujian sel kosong sebelumnya, sehingga diperoleh hasil pengecekan sebagai berikut :

Pengujian

Sel C11	= 20 – 8 + 10 – 15	= 7 à (menjadi lebih mahal 7/ton)
Sel C22	= 20 – 5 + 8 – 10	= 13 à (menjadi lebih mahal 13/ton)
Sel C31	= 25 – 15 + 10 – 8 + 5 - 10	= 7 à (lebih mahal 7/ton)
Sel C33	= 19 – 10 + 5 – 8	= 6à (menjadi lebih mahal 6/ton)

Dari hasil pengujian tersebut, ternyata semua sel sudah tidak ada yang bernilai negatif lagi, atau dengan kata lain semua sel sudah tidak dapat memberikan penurunan biaya lagi, sehingga dengan demikian dapat dikatakan kasus telah optimal, dengan total biaya :

Biaya mengirim 60 ton dari P1 ke kota B	= 60 x 5	= 300
Biaya mengirim 30 ton dari P1 ke kota C	= 30 x 8	= 240
Biaya mengirim 50 ton dari P2 ke kota A	= 50 x 15	= 750
Biaya mengirim 10 ton dari P2 ke kota C	= 10 x 10	= 100
Biaya mengirim 50 ton dari P3 ke kota B	= 50 x 10	= 500
	----- +	
Total biaya pengirimannya		= 1890

Hasil ini sama dengan 2 metode sebelumnya bahkan tanpa iterasi Stepping Stone

Alternatif 4 : Kombinasi metode RAM (Vogel Aproximation Method) dan Stepping Stone

Langkah 1

Sedikit berbeda dengan metode VAM, penyelesaian kasus dengan metode RAM dimulai dengan mencari biaya yang tertinggi untuk setiap baris dan kolom yang ada dalam tabel transportasinya. Dengan cara ini biaya tertinggi yang dimaksud adalah :

- Untuk Baris 1, biaya tertingginya = 20
- Untuk Baris 2, biaya tertingginya = 20
- Untuk Baris 3, biaya tertingginya = 25
- Untuk Kolom 1, biaya tertingginya = 25
- Untuk Kolom 2, biaya tertingginya = 20
- Untuk Kolom 3, biaya tertingginya = 19

Langkah 2 dan selanjutnya

Selanjutnya biaya pada setiap sel akan dikurangi dengan biaya tertinggi untuk baris itu dan dikurangi lagi dengan biaya tertinggi untuk kolom itu. Untuk lebih jelasnya, perhatikan perhitungan berikut ini :

- $C_{11} = 20 - 20 - 25 = - 25$
- $C_{12} = 5 - 20 - 20 = - 35$
- $C_{13} = 8 - 20 - 19 = - 31$
- $C_{21} = 15 - 20 - 25 = - 30$
- $C_{22} = 20 - 20 - 20 = - 20$
- $C_{23} = 10 - 20 - 19 = - 29$
- $C_{31} = 25 - 25 - 25 = - 25$
- $C_{32} = 10 - 25 - 20 = - 35$
- $C_{33} = 19 - 25 - 19 = - 25$

Alokasi pertama akan diberikan kepada sel yang memiliki nilai negatif paling besar, dan dari perhitungan di atas ada dua sel yang bernilai negatif paling besar, yakni sel C12 dan sel C32. Karena sama, pemilihan alokasi dapat memilih satu diantara keduanya. Sebagai contoh dipilih sel C32 (kebutuhan kota B dengan kapasitas Pabrik 3) :

Dari \ Ke-	Kota A	Kota B	Kota C	Kapasitas
Pabrik 1	20	5	8	90
Pabrik 2	15	20	10	60
Pabrik 3	25	50	19	50
Kebutuhan	50	110	40	200

Alokasi selanjutnya dilakukan dengan kembali seperti pada langkah pertama dan kedua di atas, di mana Baris 3 tidak perlu diikutsertakan lagi, karena kapasitas Pabrik 3 sudah habis.

Perubahan biaya tertinggi untuk setiap Baris dan Kolom :

- Untuk Baris 1, biaya tertinggi = 20
- Untuk Baris 2, biaya tertinggi = 20
- Untuk Baris 3, biaya tertinggi = Tidak perlu lagi, krn kapasitas Pabrik 3 habis
- Untuk Kolom 1, biaya tertinggi = 20
- Untuk Kolom 2, biaya tertinggi = 20
- Untuk Kolom 3, biaya tertinggi = 10

$$C11 = 20 - 20 - 20 = - 20$$

$$C12 = 5 - 20 - 20 = - 35$$

$$C13 = 8 - 20 - 10 = - 22$$

$$C21 = 15 - 20 - 20 = - 25$$

$$C22 = 20 - 20 - 20 = - 20$$

$$C23 = 10 - 20 - 10 = - 20$$

C31 s.d C33 tidak perlu dihitung lagi, karena kapasitas Pabrik 3 sudah habis

Dengan demikian alokasi kedua akan diberikan kepada sel yang memiliki nilai negatif paling besar, dan dari perhitungan di atas sel yang bernilai negatif paling besar, yakni sel C12 (kebutuhan kota B yang masih kurang 60, dengan kapasitas Pabrik 1) :

Dari \ Ke-	Kota A	Kota B	Kota C	Kapasitas	
Pabrik 1	20	60	5	8	90
Pabrik 2	15	20	10		60
Pabrik 3	25	50	10	19	50
Kebutuhan	50	110	40		200

Alokasi selanjutnya dilakukan dengan kembali seperti pada langkah pertama dan kedua di atas, di mana Baris 3 dan kolom 2 tidak perlu diikutsertakan lagi, karena kapasitas Pabrik 3 sudah habis dan kebutuhan kota B sudah terpenuhi.

Perubahan biaya tertinggi untuk setiap Baris dan Kolom :

- Untuk Baris 1, biaya tertinggi = 20
- Untuk Baris 2, biaya tertinggi = 15
- Untuk Baris 3, biaya tertinggi = Tidak perlu lagi
- Untuk Kolom 1, biaya tertinggi = 20
- Untuk Kolom 2, biaya tertinggi = Tidak perlu lagi
- Untuk Kolom 3, biaya tertinggi = 10

- C11 = $20 - 20 - 20 = -20$
 C12 = tidak perlu dihitung lagi, karena kebutuhan kota B sudah terpenuhi
 C13 = $8 - 20 - 10 = -22$
 C21 = $15 - 15 - 20 = -20$
 C22 = tidak perlu dihitung lagi, karena kebutuhan kota B sudah terpenuhi
 C23 = $10 - 15 - 10 = -15$
 C31 s.d C33 tidak perlu dihitung lagi, karena kapasitas Pabrik 3 sudah habis

Dengan demikian alokasi ketiga akan diberikan kepada sel yang memiliki nilai negatif paling besar, dan dari perhitungan di atas sel yang bernilai negatif paling besar, yakni sel C13 (kebutuhan kota C, dengan kapasitas Pabrik 1, yang kapasitasnya tinggal 30) :

Dari \ Ke-	Kota A	Kota B	Kota C	Kapasitas
Pabrik 1	20	60	30	90
Pabrik 2	15	20	10	60
Pabrik 3	25	50	19	50
Kebutuhan	50	110	40	200

Alokasi selanjutnya dilakukan dengan kembali seperti pada langkah pertama dan kedua di atas, di mana Baris 1, Baris 3, dan kolom 2 tidak perlu diikutsertakan lagi, karena kapasitas Pabrik 1 dan 3 sudah habis dan kebutuhan kota B sudah terpenuhi.

Perubahan biaya tertinggi untuk setiap Baris dan Kolom :

- Untuk Baris 1, biaya tertingginya = Tidak perlu lagi
 Untuk Baris 2, biaya tertingginya = 15
 Untuk Baris 3, biaya tertingginya = Tidak perlu lagi
 Untuk Kolom 1, biaya tertingginya = 15
 Untuk Kolom 2, biaya tertingginya = Tidak perlu lagi
 Untuk Kolom 3, biaya tertingginya = 10

C11 s.d C13 tidak perlu dihitung lagi, karena kapasitas Pabrik 1 sudah habis

- C21 = $15 - 15 - 15 = -15$
 C22 = tidak perlu dihitung lagi, karena kebutuhan kota B sudah terpenuhi
 C23 = $10 - 15 - 10 = -15$
 C31 s.d C33 tidak perlu dihitung lagi, karena kapasitas Pabrik 3 sudah habis

Dengan demikian alokasi keempat dan kelima akan diberikan kepada kedua sel tersisa karena memiliki nilai negatif yang sama, artinya alokasi dapat dilakukan di dua sel tersebut secara bersama (karena tinggal dua sel tersisa). Dengan demikian alokasi selanjutnya adalah memenuhi kekurangan kebutuhan kota C sebesar 10 ton dari Pabrik 2

(sel C23) dan sisa kapasitas Pabrik 2 akan dikirimkan ke kota A sebesar 50 ton, sesuai kebutuhannya. Dengan demikian, hasil alokasinya adalah:

Dari \ Ke-	Kota A	Kota B	Kota C	Kapasitas
Pabrik 1	20	60 5	30 8	90
Pabrik 2	50 15	20	10 10	60
Pabrik 3	25	50 10	19	50
Kebutuhan	50	110	40	200

Untuk mengetahui kebenaran proses ini, lakukan pengecekan :

- Apakah semua alokasi kalau dijumlah ke bawah dan kesamping sudah cocok dengan kebutuhan setiap kota dan jumlah kapasitas yang tersedia ?
- Apakah jumlah sel yang terisi sudah memenuhi syarat yang ada $(m+n)-1$, atau $(\text{jumlah kolom} + \text{jumlah baris}) - 1 = (3+3) - 1 = 5$ sel terisi ?
- Jika jawaban dari keduanya adalah 'ya' maka tabel tersebut sudah benar.

Namun demikian, sudahkah alokasi pada tabel di atas sudah optimal ?

Untuk mengetahuinya, perlu kembali dilakukan pengecekan terhadap sel-sel yang masih kosong, apakah masih ada yang bernilai negatif atau tidak.

Dari tabel di atas, sel yang masih kosong adalah sel C11, C22, C31 dan C33.

Pengujian terhadap sel-sel kosong tersebut dilakukan dengan cara yang sama seperti pengujian sel kosong sebelumnya, sehingga diperoleh hasil pengecekan sebagai berikut :

Pengujian

Sel C11	= 20 - 8 + 10 - 15	= 7 à (menjadi lebih mahal 7/ton)
Sel C22	= 20 - 5 + 8 - 10	= 13 à (menjadi lebih mahal 13/ton)
Sel C31	= 25 - 15 + 10 - 8 + 5 - 10	= 7 à (lebih mahal 7/ton)
Sel C33	= 19 - 10 + 5 - 8	= 6 à (menjadi lebih mahal 6/ton)

Dari hasil pengujian tersebut, ternyata semua sel sudah tidak ada yang bernilai negatif lagi, sehingga dengan demikian dapat dikatakan kasus telah optimal, dengan total biaya :

Biaya mengirim 60 ton dari P1 ke kota B	= 60 x 5	= 300
Biaya mengirim 30 ton dari P1 ke kota C	= 30 x 8	= 240
Biaya mengirim 50 ton dari P2 ke kota A	= 50 x 15	= 750
Biaya mengirim 10 ton dari P2 ke kota C	= 10 x 10	= 100
Biaya mengirim 50 ton dari P3 ke kota B	= 50 x 10	= 500
	----- +	
Total biaya pengirimannya		= 1890

Hasil ini sama dengan 3 metode sebelumnya bahkan tanpa iterasi Steping Stone

Alternatif 5 : Kombinasi metode NWC dan MODI

Seperti telah dijelaskan di muka, pemilihan NWC sebagai metode dalam solusi awal akan menghasilkan tabel transportasi awal sebagai berikut (lihat alternatif 1) :

Dari \ Ke-	Kota A	Kota B	Kota C	Kapasitas
Pabrik 1	50	40	40	90
Pabrik 2	50	60	40	60
Pabrik 3	50	10	40	50
Kebutuhan	50	110	40	200

Seperti telah dicoba sebelumnya, tabel di atas belumlah optimal, sehingga perlu diselesaikan lebih lanjut, namun dengan metode MODI untuk solusi akhirnya.

Langkah 1

Penggunaan metode MODI untuk solusi akhir, dimulai dengan mencari dan memberi nilai untuk setiap baris dan kolom yang ada. Pemberian nilai pertama kali diberikan untuk baris, dengan nilai nol (0). Pertanyaannya adalah, baris yang mana ?

Ada dua pendapat mengenai baris mana yang akan diberikan nilai terlebih dahulu, yakni :

1. Pendapat pertama, nilai diberikan pada baris yang pertama
2. Pendapat kedua, nilai diberikan kepada baris yang memiliki sel terisi alokasi paling banyak. Bila digunakan contoh tabel di atas, maka baris 1 dan 3 sama-sama memiliki dua sel yang terisi alokasi, dengan demikian nilai pertama sebesar nol dapat diberikan pada baris 1 atau baris 3.

Ketentuan selanjutnya adalah, apabila pemberian nilai untuk pertama diberikan pada baris 1, maka untuk proses selanjutnya, baris 1 akan selalu bernilai nol (0).

Untuk kesempatan ini, baris yang akan diberi nilai yang pertama adalah baris 1, karena kebetulan juga memiliki sel terisi alokasi terbanyak (sama dengan baris 3). Dengan demikian pemberian nilai untuk yang pertama dapat dilihat pada tabel berikut ini :

		Ke-			Kapasitas			
Dari		Kota A	Kota B	Kota C				
0	Pabrik 1	50	20	40	5	8	90	
	Pabrik 2		15	60	20	10		60
	Pabrik 3		25	10	10	40		
Kebutuhan		50		110		40	200	

Selanjutnya dilakukan pemberian nilai untuk baris dan kolom yang lain dengan cara memanfaatkan setiap sel yang telah teralokasi :

Keterangan :

B1 = Baris 1 B2 = Baris 2

K1 = Kolom 1 K2 = Kolom 2, dan seterusnya

Sel C11 = B1 + K1 $\hat{=}$ 20 = 0 + K1, $\hat{=}$ nilai K1 = 20

Sel C12 = B1 + K2 $\hat{=}$ 5 = 0 + K2, $\hat{=}$ nilai K2 = 5

Sel C22 = B2 + K2 $\hat{=}$ 20 = B2 + 5, $\hat{=}$ nilai B2 = 15

Sel C32 = B3 + K2 $\hat{=}$ 10 = B3 + 5, $\hat{=}$ nilai B3 = 5

Sel C33 = B3 + K3 $\hat{=}$ 19 = 5 + K3, $\hat{=}$ nilai K3 = 14

Selanjutnya nilai untuk setiap baris dan kolom yang telah dimasukkan ke tabel transportasi yang ada, dan hasilnya adalah :

		Ke-			Kapasitas			
Dari		Kota A	Kota B	Kota C				
0	Pabrik 1	50	20	40	5	8	90	
	Pabrik 2		15	60	20	10		60
	Pabrik 3		25	10	10	40		
Kebutuhan		50		110		40	200	

Langkah 2

Melakukan perhitungan indeks perbaikan dengan mengetes apakah sel yang masih kosong dalam tabel tersebut, masih dapat memberikan penurunan biaya (bernilai negatif), dengan cara :

Biaya pada sel kosong – nilai baris – nilai kolom

$$\begin{aligned}\text{Sel C13} &= 8 - 0 - 14 = -6 \\ \text{Sel C21} &= 15 - 15 - 20 = -20 \\ \text{Sel C23} &= 10 - 15 - 14 = -19 \\ \text{Sel C31} &= 25 - 5 - 20 = 0\end{aligned}$$

Dari perhitungan di atas terlihat bahwa pemindahan alokasi pengiriman ke sel C21 akan memberikan penghematan/penurunan biaya transportasi paling besar (20 per ton). Oleh karena itu tabel perbaikannya akan menjadi :

Langkah 3

Merubah alokasi pengiriman ke sel C21, yang pengujian sebelumnya memiliki pergerakan :

Dari \ Ke-	Kota A	Kota B	Kota C	Kapasitas
Pabrik 1	20 (-)	5 (+)	8	90
Pabrik 2	15 (+)	20 (-)	10	60
Pabrik 3	25	10	19	50
Kebutuhan	50	110	40	200

Dari pergerakan dan tanda +/- yang ada, perhatikan sel yang bertanda minus saja, yakni sel C11 dan sel C22. Dari kedua sel bertanda pergerakan minus ini, pilih sel yang alokasi pengiriman sebelumnya memiliki alokasi paling kecil. Dan ternyata sel C11, dengan alokasi sebelumnya 50 ton, dan ini lebih kecil dari alokasi sel C22 yang 60 ton.

Selanjutnya angka 50 ton di sel C11 tersebut digunakan untuk mengurangi atau menambah alokasi yang ada selama pengujian (sesuai tanda pada pergerakan pengujian). Dengan demikian dapat dihasilkan tabel transportasi sebagai berikut :

Dari \ Ke-	Kota A	Kota B	Kota C	Kapasitas
Pabrik 1	20	90 5	8	90
Pabrik 2	50 15	10 20	10	60
Pabrik 3	25	10 10	40 19	50
Kebutuhan	50	110	40	200

Perhatikan !!!

- Sel C11 menjadi 0 karena $50 - 50 = 0$
- Sel C12 menjadi 90 karena $40 + 50 = 90$
- Sel C22 menjadi 10 karena $60 - 50 = 10$
- Sel C21 menjadi 50 karena $0 + 50 = 50$

Nilai alokasi pada sel C32 dan C33 tidak mengalami perubahan karena tidak termasuk dalam pergerakan pengujian sel C21 tersebut.

Sekali lagi lakukan pengecekan :

- Apakah semua alokasi kalau dijumlah ke bawah dan kesamping sudah cocok dengan kebutuhan setiap kota dan jumlah kapasitas yang tersedia ?
- Apakah jumlah sel yang terisi sudah memenuhi syarat yang ada $(m+n)-1$, atau $(\text{jumlah kolom} + \text{jumlah baris}) - 1 = (3+3) - 1 = 5$ sel terisi ?
- Jika jawaban dari keduanya adalah ‘ya’ maka tabel tersebut sudah benar.

Sudahkah alokasi menjadi optimal ?

Untuk mengetahuinya, perlu kembali ke langkah 1 di atas. Dan ingat bahwa karena pada langkah 1 di atas baris 1 menjadi baris yang pertama kali diberi nilai nol, maka untuk proses selanjutnya baris 1 akan selalu bernilai nol (0).

Dari \ Ke-	Kota A	Kota B	Kota C	Kapasitas
0 Pabrik 1	20	90 5	8	90
Pabrik 2	50 15	10 20	10	60
Pabrik 3	25	10 10	40 19	50
Kebutuhan	50	110	40	200

Selanjutnya kembali dilakukan pemberian nilai untuk baris dan kolom yang lain dengan cara memanfaatkan setiap sel yang telah teralokasi :

$$\begin{aligned}
 \text{Sel C12} &= B1 + K2 \hat{=} 5 &= 0 + K2, & \hat{=} \text{ nilai } K2 = 5 \\
 \text{Sel C21} &= B2 + K1 \hat{=} 15 &= \text{ belum bisa dihitung, karena nilai } B2 \text{ dan } K1 \\
 & & & \text{ belum diketahui} \\
 \text{Sel C22} &= B2 + K2 \hat{=} 20 &= B2 + 5, & \hat{=} \text{ nilai } B2 = 15 \\
 \text{Sel C32} &= B3 + K2 \hat{=} 10 &= B3 + 5, & \hat{=} \text{ nilai } B3 = 5 \\
 \text{Sel C33} &= B3 + K3 \hat{=} 19 &= 5 + K3, & \hat{=} \text{ nilai } K3 = 14
 \end{aligned}$$

Setelah nilai B2 diketahui, maka nilai K1 dapat dicari dengan cara :

$$\text{Sel C21} = B2 + K1 \hat{=} 15 = 15 + K1, \hat{=} \text{ nilai } K1 = 0$$

Selanjutnya nilai untuk setiap baris dan kolom yang telah dimasukkan ke tabel transportasi yang ada, dan hasilnya adalah :

		0	5	14	
		Ke-			
Dari		Kota A	Kota B	Kota C	Kapasitas
0	Pabrik 1	20	5	8	90
15	Pabrik 2	50	10	10	60
5	Pabrik 3	25	10	40	50
Kebutuhan		50	110	40	200

Langkah 2 (lanjutan)

Melakukan perhitungan indeks perbaikan dengan mengetes apakah sel yang masih kosong dalam tabel tersebut, masih dapat memberikan penurunan biaya (bernilai negatif), dengan cara :

Biaya pada sel kosong – nilai baris – nilai kolom

$$\begin{aligned}
 \text{Sel C11} &= 20 - 0 - 0 = 20 \\
 \text{Sel C13} &= 8 - 0 - 14 = -6 \\
 \text{Sel C23} &= 10 - 15 - 14 = -19 \\
 \text{Sel C31} &= 25 - 5 - 0 = 20
 \end{aligned}$$

Dari perhitungan di atas terlihat bahwa pemindahan alokasi pengiriman ke sel C23 akan memberikan penghematan/penurunan biaya transportasi paling besar (19 per ton). Oleh karena itu tabel perbaikannya akan menjadi :

Langkah 4

Merubah alokasi pengiriman ke sel C23, yang pengujian sebelumnya memiliki pergerakan :

Dari \ Ke-	Kota A	Kota B	Kota C	Kapasitas
Pabrik 1	20	5	8	90
Pabrik 2	15	(-) 20	(+) 10	60
Pabrik 3	25	(+) 10	(-) 19	50
Kebutuhan	50	110	40	200

Dari pergerakan dan tanda +/- yang ada, perhatikan sel yang bertanda minus saja, yakni sel C22 dan sel C33. Dari kedua sel bertanda minus ini, pilih sel yang alokasi pengiriman sebelumnya memiliki alokasi paling kecil. Dan ternyata sel C22, dengan alokasi sebelumnya 10 ton, dan ini lebih kecil dari alokasi sel C22 yang 40 ton.

Selanjutnya angka 10 ton di sel C22 tersebut digunakan untuk mengurangi atau menambah alokasi yang ada selama pengujian (sesuai tanda pada pergerakan pengujian). Dengan demikian dapat dihasilkan tabel transportasi sebagai berikut :

Dari \ Ke-	Kota A	Kota B	Kota C	Kapasitas
Pabrik 1	20	90	8	90
Pabrik 2	50	20	10	60
Pabrik 3	25	20	30	50
Kebutuhan	50	110	40	200

Perhatikan !!!

Sel C22 menjadi 0 karena $10 - 10 = 0$

Sel C23 menjadi 90 karena $0 + 10 = 10$

Sel C32 menjadi 20 karena $10 + 10 = 20$

Sel C33 menjadi 50 karena $40 - 10 = 30$

Nilai alokasi pada sel C12 dan C21 tidak mengalami perubahan karena tidak termasuk dalam pergerakan pengujian sel C23 tersebut.

Sekali lagi lakukan pengecekan :

- Apakah semua alokasi kalau dijumlah ke bawah dan kesamping sudah cocok dengan kebutuhan setiap kota dan jumlah kapasitas yang tersedia ?
- Apakah jumlah sel yang terisi sudah memenuhi syarat yang ada $(m+n)-1$, atau $(\text{jumlah kolom} + \text{jumlah baris}) - 1 = (3+3) - 1 = 5$ sel terisi ?
- Jika jawaban dari keduanya adalah 'ya' maka tabel tersebut sudah benar.

Sudahkah alokasi menjadi optimal ?

Untuk mengetahuinya, perlu kembali ke langkah 1 di atas. Dan ingat bahwa karena pada langkah 1 di atas baris 1 menjadi baris yang pertama kali diberi nilai nol, maka untuk proses selanjutnya baris 1 akan selalu bernilai nol (0).

	Ke- Dari	Kota A	Kota B	Kota C	Kapasitas
0	Pabrik 1	20	5	8	90
	Pabrik 2	50 15	20	10	60
	Pabrik 3	25	10	19	50
	Kebutuhan	50	110	40	200

Selanjutnya kembali dilakukan pemberian nilai untuk baris dan kolom yang lain dengan cara memanfaatkan setiap sel yang telah teralokasi :

$$\begin{aligned}
 \text{Sel C12} &= B1 + K2 \hat{=} 5 &&= 0 + K2, &&\hat{=} \text{ nilai } K2 = 5 \\
 \text{Sel C21} &= B2 + K1 \hat{=} 15 &&= \text{ belum bisa dihitung, karena nilai } B2 \text{ dan } K1 \\
 &&&&&\text{ belum diketahui} \\
 \text{Sel C23} &= B2 + K3 \hat{=} 10 &&= \text{ belum bisa dihitung, karena nilai } B2 \text{ dan } K3 \\
 &&&&&\text{ belum diketahui} \\
 \text{Sel C32} &= B3 + K2 \hat{=} 10 &&= B3 + 5, &&\hat{=} \text{ nilai } B3 = 5 \\
 \text{Sel C33} &= B3 + K3 \hat{=} 19 &&= 5 + K3, &&\hat{=} \text{ nilai } K3 = 14
 \end{aligned}$$

Setelah nilai K3 diketahui, maka nilai sel C23 dapat dicari dengan cara :

$$\text{Sel C23} = B2 + K3 \hat{=} 10 = B2 + 14 \hat{=} \text{ nilai } B2 = -4$$

Dan setelah nilai B2 diketahui, nilai sel C21 juga dapat dicari dengan cara :

$$\text{Sel C21} = B2 + K1 \hat{=} 15 = -4 + K1 \hat{=} \text{ nilai } K1 = 19$$

Selanjutnya nilai untuk setiap baris dan kolom yang telah dimasukkan ke tabel transportasi yang ada, dan hasilnya adalah :

		19	5	14	
Ke- Dari	Kota A	Kota B	Kota C	Kapasitas	
0	Pabrik 1	20	5	8	90
- 4	Pabrik 2	50	15	20	10
5	Pabrik 3	25	10	19	30
	Kebutuhan	50	110	40	200

Langkah 2 (lanjutan)

Melakukan perhitungan indeks perbaikan dengan mengetes apakah sel yang masih kosong dalam tabel tersebut, masih dapat memberikan penurunan biaya (bernilai negatif), dengan cara :

Biaya pada sel kosong – nilai baris – nilai kolom

$$\text{Sel C11} = 20 - 0 - 19 = 1$$

$$\text{Sel C13} = 8 - 0 - 14 = - 6$$

$$\text{Sel C22} = 20 - (- 4) - 5 = 19$$

$$\text{Sel C31} = 25 - 5 - 19 = 1$$

Dari perhitungan di atas terlihat bahwa pemindahan alokasi pengiriman ke sel C13 akan memberikan penghematan/penurunan biaya transportasi paling besar (6 per ton). Oleh karena itu tabel perbaikannya akan menjadi :

Langkah 5

Merubah alokasi pengiriman ke sel C13, yang pengujian sebelumnya memiliki pergerakan :

Ke- Dari	Kota A	Kota B	Kota C	Kapasitas
Pabrik 1	20	5	8	90
Pabrik 2	15	20	10	60
Pabrik 3	25	10	19	50
Kebutuhan	50	110	40	200

Diagram pergerakan alokasi:

- Red arrow from (1,2) to (1,3) labeled (-)
- Red arrow from (1,3) to (1,4) labeled (+)
- Red arrow from (2,2) to (1,2) labeled (+)
- Red arrow from (3,3) to (2,3) labeled (-)
- Red arrow from (3,3) to (3,4) labeled (-)
- Red arrow from (3,4) to (2,4) labeled (+)

Dari pergerakan dan tanda +/- yang ada, perhatikan sel yang bertanda minus saja, yakni sel C12 dan sel C33. Dari kedua sel bertanda pergerakan minus ini, pilih sel yang alokasi pengirimannya sebelumnya memiliki alokasi paling kecil. Dan ternyata sel C33, dengan alokasi sebelumnya 30 ton, dan ini lebih kecil dari alokasi sel C12 yang 90 ton.

Selanjutnya angka 30 ton di sel C33 tersebut digunakan untuk mengurangi atau menambah alokasi yang ada selama pengujian (sesuai tanda pada pergerakan pengujian). Dengan demikian dapat dihasilkan tabel transportasi sebagai berikut :

Dari \ Ke-	Kota A	Kota B	Kota C	Kapasitas
Pabrik 1	20	60	30	90
Pabrik 2	50	15	10	60
Pabrik 3	25	50	19	50
Kebutuhan	50	110	40	200

Perhatikan !!!

- Sel C12 menjadi 60 karena $90 - 30 = 60$
- Sel C13 menjadi 30 karena $0 + 30 = 30$
- Sel C32 menjadi 50 karena $20 + 30 = 50$
- Sel C33 menjadi 0 karena $30 - 30 = 0$

Nilai alokasi pada sel C21 dan C23 tidak mengalami perubahan karena tidak termasuk dalam pergerakan pengujian sel C13 tersebut.

Sekali lagi lakukan pengecekan :

- Apakah semua alokasi kalau dijumlah ke bawah dan kesamping sudah cocok dengan kebutuhan setiap kota dan jumlah kapasitas yang tersedia ?
- Apakah jumlah sel yang terisi sudah memenuhi syarat yang ada $(m+n)-1$, atau $(\text{jumlah kolom} + \text{jumlah baris}) - 1 = (3+3) - 1 = 5$ sel terisi ?
- Jika jawaban dari keduanya adalah ‘ya’ maka tabel tersebut sudah benar.

Sudahkah alokasi menjadi optimal ?

Untuk mengetahuinya, perlu kembali ke langkah 1 di atas. Dan ingat bahwa karena pada langkah 1 di atas baris 1 menjadi baris yang pertama kali diberi nilai nol, maka untuk proses selanjutnya baris 1 akan selalu bernilai nol (0).

	Ke- Dari	Kota A	Kota B	Kota C	Kapasitas
0	Pabrik 1	20	5	8	90
	Pabrik 2	50	20	10	60
	Pabrik 3	25	10	19	50
	Kebutuhan	50	110	40	200

Selanjutnya kembali dilakukan pemberian nilai untuk baris dan kolom yang lain dengan cara memanfaatkan setiap sel yang telah teralokasi :

$$\begin{aligned}
 \text{Sel C12} &= B1 + K2 \hat{=} 5 &= 0 + K2, & \hat{=} \text{nilai } K2 = 5 \\
 \text{Sel C13} &= B1 + K3 \hat{=} 8 &= 0 + K3 & \hat{=} \text{nilai } K3 = 8 \\
 \text{Sel C21} &= B2 + K1 \hat{=} 15 &= \text{belum bisa dihitung, karena nilai } B2 \text{ dan } K1 & \text{belum diketahui} \\
 \text{Sel C23} &= B2 + K3 \hat{=} 10 &= B2 + 8 & \hat{=} \text{nilai } B2 = 2 \\
 \text{Sel C32} &= B3 + K2 \hat{=} 10 &= B3 + 5, & \hat{=} \text{nilai } B3 = 5
 \end{aligned}$$

Dan setelah nilai B2 diketahui, nilai sel C21 dapat dicari dengan cara :

$$\text{Sel C21} = B2 + K1 \hat{=} 15 = 2 + K1 \hat{=} \text{nilai } K1 = 13$$

Selanjutnya nilai untuk setiap baris dan kolom yang telah dimasukkan ke tabel transportasi yang ada, dan hasilnya adalah :

	Ke- Dari	Kota A	Kota B	Kota C	Kapasitas
0	Pabrik 1	20	5	8	90
2	Pabrik 2	50	20	10	60
5	Pabrik 3	25	10	19	50
	Kebutuhan	50	110	40	200

Langkah 2 (lanjutan)

Melakukan perhitungan indeks perbaikan dengan mengetes apakah sel yang masih kosong dalam tabel tersebut, masih dapat memberikan penurunan biaya (bernilai negatif), dengan cara :

Biaya pada sel kosong – nilai baris – nilai kolom

$$\begin{aligned} \text{Sel C11} &= 20 - 0 - 13 = 7 \\ \text{Sel C22} &= 20 - 2 - 5 = 13 \\ \text{Sel C31} &= 25 - 5 - 13 = 7 \\ \text{Sel C33} &= 19 - 5 - 8 = 6 \end{aligned}$$

Dari perhitungan di atas terlihat bahwa semua kemungkinan pemindahan alokasi pengiriman sudah positif, atau tidak dapat memberikan penurunan biaya lagi, sehingga dengan demikian tabel di atas telah optimal, dengan total biaya optimalnya :

$$\begin{aligned} \text{Biaya mengirim 60 ton dari P1 ke kota B} &= 60 \times 5 &= 300 \\ \text{Biaya mengirim 30 ton dari P1 ke kota C} &= 30 \times 8 &= 240 \\ \text{Biaya mengirim 50 ton dari P2 ke kota A} &= 50 \times 15 &= 750 \\ \text{Biaya mengirim 10 ton dari P2 ke kota C} &= 10 \times 10 &= 100 \\ \text{Biaya mengirim 50 ton dari P3 ke kota B} &= 50 \times 10 &= 500 \\ &&----- + \\ \text{Total biaya pengirimannya} &&= \mathbf{1890} \end{aligned}$$

Catatan :

Alternatif penyelesaian ke-6, 7 dan 8 dapat dilakukan dengan cara yang relatif sama seperti pada alternatif penyelesaian 5 di atas, hanya saja dengan solusi awal yang sesuai dengan metodenya, yakni metode LC, VAM dan RAM.

Silahkan dicoba sendiri à PR ya..!!!!

Masalah Transportasi untuk kasus tidak normal (Kapasitas tidak sama dengan Kebutuhan).

Seperti telah dijelaskan di atas, apabila dijumpai kasus dimana nilai kapasitas perusahaan tidak sama dengan kebutuhannya, maka kasus yang dihadapi dapat dikategorikan dalam kasus yang tidak normal, karena :

1. Apabila kapasitas > kebutuhan, akan terjadi kelebihan kapasitas dan hal ini akan menimbulkan biaya simpan
2. Apabila kapasitas < kebutuhan, akan terjadi kekurangan kapasitas yang berarti akan menimbulkan biaya kehilangan kesempatan (opportunity cost)
3. Terjadi masalah 'Degeneracy' dimana syarat $(m+n)-1$ tidak terpenuhi

Oleh karena itu, sebelum dapat diselesaikan dengan metode solusi awal dan solusi akhir yang ada, maka kasus semacam ini perlu dinormalkan terlebih dahulu.

Sebagai contoh, dalam kasus di atas, kapasitas Pabrik 3 meningkat dari 50 ton menjadi 100 ton, sehingga secara keseluruhan kapasitas perusahaan menjadi 250, sementara kebutuhan dari ketiga kota hanya 200 ton.

Untuk menyelesaikan kasus ini (kapasitas > kebutuhan), maka dalam tabel transportasinya perlu dibuatkan satu buah kolom lagi yang disebut dengan kolom Dummy, untuk mengakomodir kelebihan kapasitas yang ada. Dalam kolom ini, semua sel yang ada tidak memerlukan biaya, atau nol. Untuk lebih jelasnya, perhatikan tabel transportasinya, sebagai berikut :

Dari \ Ke-	Kota A	Kota B	Kota C	Dummy	Kapasitas
Pabrik 1	20	5	8	0	90
Pabrik 2	15	20	10	0	60
Pabrik 3	25	10	19	0	100
Kebutuhan	50	110	40	50	250

Apabila kemudian digunakan metode NWC sebagai solusi awal untuk menyelesaikan kasus ini, maka alokasi pertamanya akan menjadi :

Dari \ Ke-	Kota A	Kota B	Kota C	Dummy	Kapasitas
Pabrik 1	50 20	40 5	8	0	90
Pabrik 2	15	60 20	10	0	60
Pabrik 3	25	10 10	40 19	50 0	100
Kebutuhan	50	110	40	50	250

Perhatikan, bahwa setelah dibutkan kolom Dummy untuk menampung kelebihan kapasitas, proses penyelesaian dengan solusi awal NWC ditempuh dengan cara yang sama seperti pada kasus normal.

Setelah itu, proses selanjutnya akan sama dengan penyelesaian kasus normal sebelumnya.

Contoh kasus tidak normal kedua adalah apabila dengan kapasitas perusahaan sebelumnya (200 ton), ternyata kebutuhan di kota A naik dari 50 ton menjadi 100 ton, sehingga saat ini kebutuhan > kapasitas yang tersedia.

Untuk menyelesaikan kasus tidak normal seperti ini, yang pertama perlu dilakukan adalah membuat baris Dummy, untuk menampung kelebihan kebutuhan dari kota A. Dengan demikian pada tabel transportasi pertama akan menjadi seperti tabel berikut ini :

Dari \ Ke-	Kota A	Kota B	Kota C	Kapasitas
Pabrik 1	20	5	8	90
Pabrik 2	15	20	10	60
Pabrik 3	25	10	19	50
Dummy	0	0	0	50
Kebutuhan	100	110	40	250

Apabila kemudian digunakan metode NWC sebagai solusi awal untuk menyelesaikan kasus ini, maka alokasi pertamanya akan menjadi :

Dari \ Ke-	Kota A	Kota B	Kota C	Kapasitas
Pabrik 1	90 20	5	8	90
Pabrik 2	10 15	50 20	10	60
Pabrik 3	25	50 10	19	50
Dummy	0	10 0	40 0	50
Kebutuhan	100	110	40	250

Perhatikan, bahwa setelah dibutukan baris Dummy untuk menampung kelebihan kebutuhan, proses penyelesaian dengan solusi awal NWC ditempuh dengan cara yang sama seperti pada kasus normal.

Dan seperti pada kasus tidak normal sebelumnya, proses selanjutnya untuk mendapatkan hasil yang optimal, akan sama dengan penyelesaian kasus normal sebelumnya.

Contoh kasus tidak normal ketiga, sering disebut dengan masalah *Degeneracy*, dimana syarat alokasi / jumlah sel yang teralokasikan tidak memenuhi syarat $(m+n) - 1$, seperti terlihat pada contoh kasus Degeneracy berikut ini :

Ke- Dari	Kota A	Kota B	Kota C	Kota D	Kapasitas
Pabrik 1	20	5	8	11	90
Pabrik 2	15	20	10	15	60
Pabrik 3	25	10	19	20	50
Kebutuhan	50	40	40	70	200

Apabila kasus di atas diselesaikan dengan metode solusi awal NWC, maka diperoleh alokasi pengiriman sebagai berikut :

Ke- Dari	Kota A	Kota B	Kota C	Kota D	Kapasitas
Pabrik 1	50 20	40 5	8	11	90
Pabrik 2	15	20	40 10	15	60
Pabrik 3	25	10	20 19	50 20	50
Kebutuhan	50	40	40	70	200

Perhatikan, bahwa dengan metode solusi awal NWC, jumlah sel yang terisi hanya lima, sementara itu, menurut rumus yang disyaratkan adalah $(m+n) - 1$ atau $(3+4) - 1 = 6$, jadi kurang satu sel.

Akibatnya adalah, untuk pengujian sel yang masih kosong, hampir semua sel yang masih kosong tidak dapat dipakai untuk menguji apakah masih memiliki nilai negatif atau tidak, kecuali sel C24.

Untuk menyelesaikan kasus *Degeneracy* ini, perlu diberikan nilai nol pada salah satu sel yang masih kosong (di sel manapun yang masih kosong), sehingga meskipun ada sel yang bernilai nol, tapi jumlah sel yang terisi telah memenuhi syarat alokasi $(m+n) - 1$ atau 6 sel. Dengan pemberian nilai nol ini, maka sekarang semua sel kosong dapat diuji dan proses mencari hasil optimal dapat dilakukan seperti biasa.

Sebagai latihan, coba selesaikan masalah Degeneracy di atas dengan metode solusi awal dan akhir yang saudara bisa !!!